January 1996

14-15 パズルは何故解けないか？

松井 知己

多く人は、図 1 のようなパズルを何処かで見かけたことがあるだろう。 4×4 の正方形の枠の中に、 15 個の小さな正方形が入っており、この小さな正方形をスライドさせることにより、数字を整列させるパズルである。巷で売っている多くの商品は、小さな正方形に絵が印刷されており、これを動かすことによって絵を完成させるという形式のものが多い。

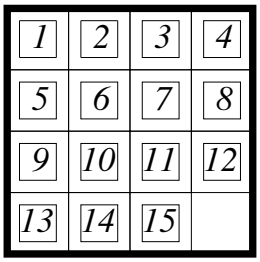


図 1. 14-15 パズル

このパズルは歴史的経緯から 14-15 パズルと呼ばれている。それは昔サム = ロイドがある懸賞問題つきでこのパズルを売りだし、世界中で大ヒットをとばしたことによる。その懸賞問題とは、「以下の図 2 の配置から出発して図 1 の配置に持っていくことができるか」というものであった。この懸賞問題で一躍有名になったことから、このパズル自体も 14-15 パズルと呼ばれることが多い。当時日本でもずいぶん売れたらしいとの話を、人づてに聞いたことがある。

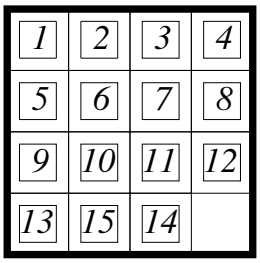


図 2. 懸賞問題

さてこの懸賞問題であるが、結局賞金をもらった人はいなかった。それは、実はこの問題の答えは「不可能」であったからである。問題の答が「不可能」すなわち「ない」ことから、上記の「図 2 の配置から出発して図 1 の配置に持っていくことができるか」というパズルは特許が取れなかったと言う。

さて、この問題は何故不可能なのだろう？実は、（証明を考えつくのは、たいへんかもしれないが）置換の知識さえあれば証明は容易である。

まず小さな正方形 (以下ピースと呼ぶ) の任意の配置に対して、これを図 3 のような順番に並べた数列を対応させよう。この数列は 1 から 15 の数字の順列となっている。明らかに、一つの数列に対して、ピースのおいてない空の場所が何処にあるかで、 16 種類の配置が対応している。

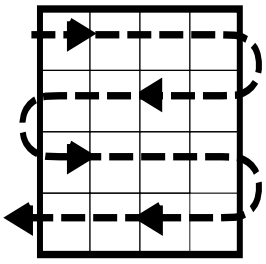
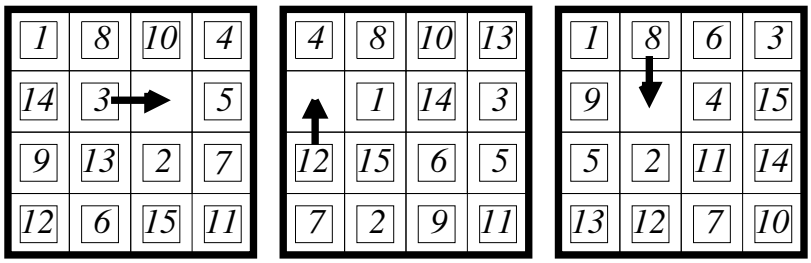


図 3. 数列への対応

さて次にピースの移動について考えよう。ピースの移動には図 $4(\mathrm{a})(\mathrm{b})$ のように対応する数列を変化させない移動と、図 $4(\mathrm{c})$ のように対応する数列を変化させる移動が存在する。そして最大のポイントは、図 $4(\mathrm{c})$ のように対応する数列を変化させる移動で得られる数列は、移動前の数列から偶数回の互換によってできるという性質である (互換とは、 2 つの数字を入れ換えるという操作を言う) 。実際 (c) によって、数列は $(1,8,6,3,15,4,9,5,2,11,14,10,7,12,13)$ から $(1,6,3,15,4,8,9,5,2,11,14,10,7,12,13)$ に変わっている。この理由は、ピースの移動による数列の変化は、そのピースの数字が偶数個の数字を飛び越した場所に挿入されるという形になっているからである。このため、任意の初期配置に対してピースの移動によって得られる配置は、対応する数列が、初期配置に対応する数列に偶置換を施して得られるものとなっている。



(a) (b) (c)

図 4. ピースの移動

では上記の懸賞問題の初期配置と目的の配置について考えてみよう。初期配置図 2 に対応する数列は $S_2 = (1,2,3,4,8,7,6,5,9,10,11,12,15,14,13)$ であり目的の配置図 1 に対応する数列は $S_1 = (1,2,3,4,8,7,6,5,9,10,11,12,14,15,13)$ となっている。ゆえに数列 S_1 は S_2 から一回の互換で得られる。上記の数列を 1 から 15 の数字の置換と考えよう。置換に関する性質として、「ある置換に奇数回の互換を施してできる置換は、同じ置換に偶数回の互換を施してできることは無い」ことが知られている。(この事実は、例えば手近の線形代数の本で、 行列式の定義あたりを見れば載っているでしょう。) すなわち、懸賞問題の初期配置からピースの移動で得られる配置は、対応する数列 (置換) が「初期配置の数列 (置換) に偶数回の互換を施して得られる」ものだけであり、目的の配置を得ることは決してできないことが分かる。