線形計画法入門

松井知己　東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻
http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~tomomi/

1　線形計画法 (Linear Programming)

JIS Z 8121 D5：線形計画法：条件付き極値問題で目的関数が 1 次であり、制約が 1 次不等式または等式からなるもの。通常は各変数が非負であるという条件がついている。 LP と略称されることがある。

1.1　生産計画問題

あるシャトーでは，3 種のぶどう CABERNET, MERLOT, SEMILLON を原料として赤白ロゼの３種のワインを作っている．収益の最も多くなる生産方法は？

各ワイン 1 単位を生産するのに必要なぶどうの量

種類	赤	白	ロゼ	最大供給量
CABERNET	2	0	0	4 [t/ 日]
MERLOT	1	0	2	8 [t/ 日]
SEMILLON	0	3	1	6 [t/ 日]
収益	3	4	2	[百万円 / 単位]

類似問題：ダイエット問題・混合肥料問題等

1.2　仕事配分問題

作業機械 $M_1, M_2, \ldots, M_n$ と，仕事 $T_1, T_2, \ldots, T_m$ がある．作業機械 M_i は仕事 T_j をする場合 m_{ij} 時間かかる. 作業機械 M_i の稼働時間は最大 C_i 時間である．どのように仕事を機械に割り当てたら，機械の延べ稼動時間を最小にできるか？

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \\ \text{subject to} & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le C_i \ \ (i = 1,2,\ldots,n), \\ & \sum_{i=1}^{n} (1/m_{ij}) x_{ij} = 1 \ \ (j = 1,2,\ldots,m), \\ & x_{ij} \ge 0 \ \ (i = 1,2,\ldots,n; j = 1,2,\ldots,m). \end{array}$$

類似問題：輸送問題，クラス編成問題等

1.3　割当問題

作業機械 $M_1, M_2, \ldots, M_n$ と，仕事 $T_1, T_2, \ldots, T_n$ がある．作業機械 M_i で仕事 T_j をする場合，w_{ij} の収入がある．各作業機械は 1 つの仕事をすることができ，各作業は 1 つの作業機械に割り当てるとき，収益が最大となる，仕事の機械への割当は？

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_{ij} \\ \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \ (i = 1,2,\ldots,n), \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \ (j = 1,2,\ldots,n), \\ & x_{ij} \ge 0 \ \ (i = 1,2,\ldots,n; j = 1,2,\ldots,n). \end{array}$$

本来は，変数が 1 または 0 しか取らない問題だが，0 以上 1 以下と「緩く」しても構わない．

1.4 歴史

経済	数理計画	数学
		不等式理論
		(1873)Goldan
		(1902)Farkas
(1936) Leontief 産業連関分析		(1936)Motzkin
(1944) von Neuman and Morgenstern		
ゲーム理論	(1947) Dantzig 単体法	
(1948) Koopmans 経済モデル	(1947) von Neumann 双対理論	
(1975)Koopmans and Kantorovich	(1979) Khachian 多項式時間算法	
ノーベル賞	(1984) Karmarkar（内点法）	

2 LP の標準形

- 等式制約を，2 本の不等式制約で表す．
- 自由変数を，2 つの非負変数で表す．
- 不等式制約を，スラック変数を導入して，等式制約にする．
- 目的関数を，最大化（最小化）にする．

3 基礎的な知識

3.1 変数が 2 個の問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & 20x_1 + 10x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 \le 6 \\
& 3x_1 + x_2 \le 12 \\
& x_1 + 2x_2 \le 10 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

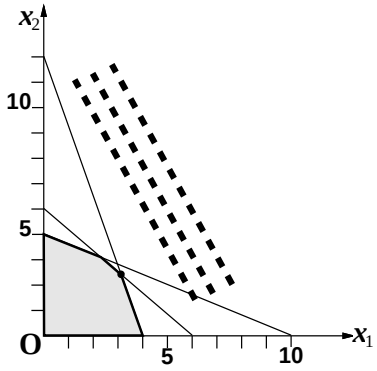

図 1: 2 変数の LP

3.2 用語の定義

目的関数，制約式，非負制約，許容解（実行可能解），許容領域，最適解，最適値，非有界，実行不能．

4 単体法

4.1 制約式が 1 本の問題

$$
\begin{array}{ll}
\max. & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 \\
\text{s. t.} & 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 12, \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\max. & 18 - 4x_2 - (1/2)x_3 - (5/2)x_4 \\
\text{s. t.} & x_1 = 6 - 3x_2 - (3/2)x_3 - (3/2)x_4 = 12, \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.
\end{array}
$$

4.2 辞書形式単体法

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \max. & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{s. t.} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \le 4, & \\ & 2x_1 & & & + & 2x_3 & \le 5, & \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0. & & & & & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{lrcrcrcrcl} \max. & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & & \\ \text{s. t.} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = 4, \\ & 2x_1 & & & + & 2x_3 & & + x_5 & = 5, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. & & & & & & & \end{array}$$

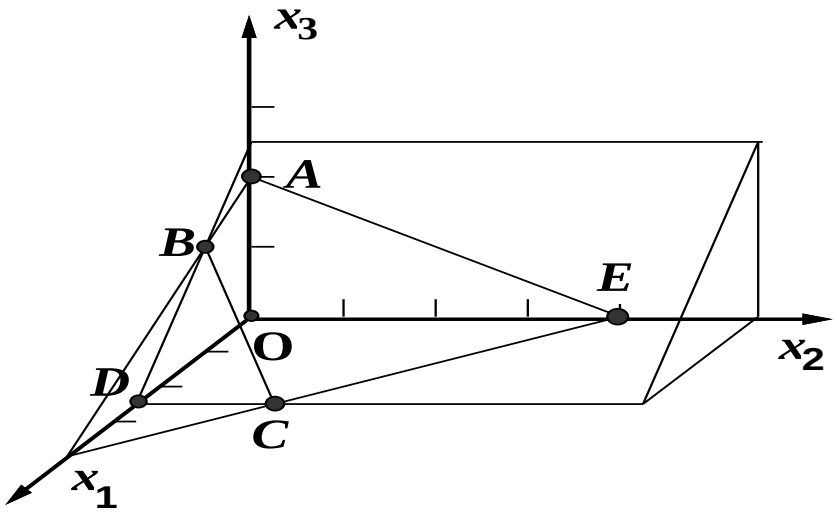

図 2： 3 変数の LP

点O	点A
$(z; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0; 0, 0, 0, 4, 5)$	$(z; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (8; 0, 0, 2, 0, 1)$
$z = 0 + 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$	$z = 8 + x_1 - 2x_4$
$x_4 = 4 - x_1 - x_2 - 2x_3$	$x_3 = 2 - (1/2)x_1 - (1/2)x_2 - (1/2)x_4$
$x_5 = 5 - 2x_1 - 2x_3$	$x_5 = 1 - x_1 + x_2 + x_4$
点B	点C
$(z; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (9; 1, 0, 3/2, 0, 0)$	$(z; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (21/2; 5/2, 3/2, 0, 0, 0)$
$z = 9 - x_5 + x_2 - x_4$	$z = 21/2 - (1/2)x_5 - x_3 - 2x_4$
$x_3 = (3/2) + (1/2)x_5 - x_2 - x_4$	$x_2 = (3/2) + (1/2)x_5 - x_3 - x_4$
$x_1 = 1 - x_5 + x_2 + x_4$	$x_1 = (5/2) - (1/2)x_5 - x_3$
点D	点E
$(z; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (15/2; 5/2, 0, 0, 3/2, 0)$	$(z; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (8; 0, 4, 0, 0, 5)$
$z = 15/2 + 2x_2 - (3/2)x_5 + x_3$	$z = 8 + x_1 - 2x_4$
$x_4 = (3/2) - x_2 + (1/2)x_5 - x_3$	$x_2 = 4 - x_1 - 2x_3 - x_4$
$x_1 = (5/2) - (1/2)x_5 - x_3$	$x_5 = 5 - 2x_1 - 2x_3$

用語：辞書，基底変数，基底解， ピヴォット，取り入れ変数，追い出し変数.
単体法のピヴォット数は，経験的に「辞書の行数の 1.5 倍程度」と言われている．

4.3 行列形式

$$\begin{array}{ll} \max. & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \ge \mathbf{o}. \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{l} A = [B|N] \\ B\text{は (正方) 正則部分行列} \\ \boldsymbol{c}^\top = (\boldsymbol{c}_B^\top, \boldsymbol{c}_N^\top),\ \ \boldsymbol{x}^\top = (\boldsymbol{x}_B^\top, \boldsymbol{x}_N^\top) \end{array}} \quad \begin{array}{ll} \max. & \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N^\top - \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}N)\boldsymbol{x}_N \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x}_B = B^{-1}\boldsymbol{b} - B^{-1}N\boldsymbol{x}_N, \\ & \boldsymbol{x} \ge \mathbf{o}. \end{array}$$

上記辞書に対応する基底解： $(\boldsymbol{x}_B^\top, \boldsymbol{x}_N^\top) = ((B^{-1}\boldsymbol{b})^\top, \mathbf{o}^\top)$
$\boldsymbol{c}_N^\top - \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}N \le \mathbf{o}$ かつ $((B^{-1}\boldsymbol{b})^\top, \mathbf{o}^\top) \ge \mathbf{o}$ が成り立つとき、上記の基底解は最適解。

5 双対問題

5.1 数値例

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\text{maximize} & 20x_1 & + & 10x_2 & & \\
\text{subject to} & x_1 & + & x_2 & \leq & 6, \\
& 3x_1 & + & x_2 & \leq & 12, \\
& x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcrcl}
2\times(& x_1 & + & 2x_2 & \leq 10) \\
6\times(& 3x_1 & + & x_2 & \leq 12) \\
\hline
& 20x_1 & + & 10x_2 & \leq 92
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcrcl}
5\times(& x_1 & + & x_2 & \leq 6) \\
5\times(& 3x_1 & + & x_2 & \leq 12) \\
\hline
& 20x_1 & + & 10x_2 & \leq 90
\end{array}
$$

上記の問題において、最適値の上界を上記右のように得られる。

5.2 ラグランジュ緩和問題による導入

線形計画問題のラグランジュ緩和問題を導入することによって、線形計画問題の双対問題が自然な形で導かれることを示す．

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{LP} & \text{maximize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
& \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}.
\end{array}
$$

問題 LP の不等式制約を，非負のベクトル $\boldsymbol{y} \geq 0$（ラグランジュ乗数）を用いて緩和する．

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P1} & \text{maximize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^\top (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) \\
& \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}.
\end{array}
$$

上記の問題の目的関数値は、許容解ならば、その値は $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$ より大きめに出ている. このことから、上記の問題は問題 LP の緩和問題である. 逆に言えば、この性質を保つために、$\boldsymbol{y}$ は非負でなければならない. また目的関数の $\boldsymbol{y}^\top (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})$ の項は、この不等式制約を破る解については罰金という形で目的関数に反映していると見ることもできる. この線形計画問題の制約全てを取り除くと，

$$
\text{maximize} \qquad \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^\top (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{y}^\top A)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b},
$$

という制約の無い問題となる.

この問題は、制約の無い線形目的関数の最大化という非常に特殊な問題である。どのように特殊かというと、目的関数ベクトル $\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{y}^\top A$ に非ゼロの係数が一つでも存在 するならば、 この問題の最適値は無限大となってしまう。目的関数値が無限大となってしまうのでは、緩和問題として用をなさない。これを阻止するには、上記の緩和問題の目的関数ベクトルをゼロベクトルにするしかない。このことから、ラグランジュ乗数 $\boldsymbol{y}$ としては、$\boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{y}^\top A = \mathbf{o}^\top$ を満たすものを選ぶのが望ましい。このとき、 上記の緩和問題の最適値は $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b}$ そのものとなる。

以上より、もっとも良いラグランジュ乗数を求めるには、

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} \\
\text{subject to} & \boldsymbol{y}^\top A = \boldsymbol{c}^\top, \ \boldsymbol{y} \geq \mathbf{o},
\end{array}
$$

を解けば良いことが分かる。この問題が、線形計画問題 LP の双対問題に他ならない。

上記の双対問題について、同じ様に緩和問題を作ることによって、再び問題 LP が得られる。

単体法のピヴォットが辞書の行数の 1.5 倍程度であることから、双対問題の辞書の行数の方が小さいならば、双対問題を単体法で解いた方が良い。

6　双対定理

強双対定理　双対な線形計画問題の組 P と D のどちらも許容解を持つならば、P と D の両方が最適解を持ち、最適値は一致する。

6.1　Farkas の補題

Farkas の補題: 任意の $m \times n$ 実行列 A と, 任意の m 次元実ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対し, 以下 X と Y のうち丁度 1 つが要素をもつ. $X = \{\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}\}$, $Y = \{\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^m \mid \boldsymbol{y}^\top A \geq \mathbf{o}^\top,\ \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} < 0\}$.

例えば

$$X = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \;\middle|\; \begin{array}{l} -x_1 + x_2 + x_3 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 7, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \end{array} \right\},$$

$$Y = \left\{ \boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \;\middle|\; \begin{array}{ll} -y_1 + 2y_2 \geq 0, & y_1 + y_2 \geq 0, \\ y_1 - y_2 \geq 0, & -5y_1 + 7y_2 < 0 \end{array} \right\}.$$

とすると, Y が要素 $\boldsymbol{y} = (2, 1)$ を持つ事と Farkas の補題より, X が空である事が容易に判定される. 事実, $\boldsymbol{y} = (2, 1)$ の重みで X の定義中の等式を加えると,

$$\begin{array}{l} 2*(-x_1 + x_2 + x_3) = 2 * (-5) \\ 1*(2x_1 + x_2 - x_3) = 1 * 7 \\ \hline (0x_1 + 3x_2 + x_3) = -3 \end{array}$$

となり, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \geq \mathbf{o}$ とは両立しない式となっていることから, X が空であることが分かる.

集合 S と集合 $\{j\}$ に対し, $S \cup \{j\}$ を $S + j$ と書く. また $j \in S$ の時, $S \setminus \{j\}$ を $S - j$ と書く. 集合 S, I, J, K が $I \cap J = J \cap K = K \cap I = \emptyset$ と $S = I \cup J \cup K$ を満たすとき, I, J, K は S の分割であると言う. 本稿では, 冒頭の主張を証明する代わりに, より一般的な形式の以下の主張を証明する.

Farkas の補題 (一般形): 任意の $m \times n$ 行列 A と, 任意の m 次元ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対し, 以下が成り立つ. 行列 A の列の添え字集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし, A_i を A の第 i 列ベクトルとする. N の分割 I, J, K に対し, $X(I, J, K)$, $Y(I, J, K)$ を以下のように定義する.

$$X(I,J,K) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{ll} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, & \\ x_i \geq 0 & (i \in I), \\ x_i \text{ は自由} & (i \in J), \\ x_i = 0 & (i \in K) \end{array} \right\},$$

$$Y(I,J,K) = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^m \;\middle|\; \begin{array}{ll} \boldsymbol{y}^\top A_i \geq 0 & (i \in I), \\ \boldsymbol{y}^\top A_i = 0 & (i \in J), \\ \boldsymbol{y}^\top A_i \text{ は自由} & (i \in K), \\ \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} < 0 & \end{array} \right\}.$$

N の任意の分割 I, J, K に対し, $X(I, J, K)$ と $Y(I, J, K)$ のうち丁度 1 つが要素をもつ.

上記において $I = N$, $J = K = \emptyset$ とすると, 冒頭の Farkas の補題となる.　集合 $X(I, J, K)$, $Y(I, J, K)$ の定義中の制約は, 以下のようになっている.

表 1. $X(I, J, K)$ と $Y(I, J, K)$ における制約.

添え字 i	I	J	K
$X(I, J)$ における x_i の符号	非負	自由	ゼロ
$Y(I, J)$ における $\boldsymbol{y}^\top A_i$ の符号	非負	ゼロ	自由

証明: $\overline{\boldsymbol{x}} \in X(I, J, K)$ かつ $\overline{\boldsymbol{y}} \in Y(I, J, K)$ とすると,

$$0 > \overline{\boldsymbol{y}}^\top \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{y}}^\top A \overline{\boldsymbol{x}} = \sum_{i \in I} \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_i \overline{x}_i + \sum_{i \in J} \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_i \overline{x}_i + \sum_{i \in K} \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_i \overline{x}_i = \sum_{i \in I} \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_i \overline{x}_i + 0 + 0 \geq 0$$

となり矛盾. ゆえに $X(I, J, K)$ と $Y(I, J, K)$ が同時に解を持つことは無い. 以下では X と Y の一方が要素を持つ事を, I の要素数に関する帰納法を用いて示す.

(1) $|I|=0$ の場合. 補題 1 において証明する.
(2) 正整数 k に関して, $|I|<k$ ならば補題の主張が成り立つと仮定して, $|I|=k$ の場合を示す.
I 中の要素を 1 つ選び l とする. 以下では 6 つの集合

$$X(I,J,K), X(I-l,J+l,K), X(I-l,J,K+l), Y(I,J,K), Y(I-l,J+l,K), Y(I-l,J,K+l),$$

について議論する. これらの集合の定義中の制約を表 1 に倣ってまとめると, 次のようになる.

表 2. 制約の一覧表.

添え字	$I-l$	l	J	K
$X(\quad I, \quad J, \quad K)$	非負	非負	自由	ゼロ
$X(I-l,\ J+l, \quad K)$	非負	自由	自由	ゼロ
$X(I-l, \quad J,\ K+l)$	非負	ゼロ	自由	ゼロ
$Y(\quad I, \quad J, \quad K)$	非負	非負	ゼロ	自由
$Y(I-l,\ J+l, \quad K)$	非負	ゼロ	ゼロ	自由
$Y(I-l, \quad J,\ K+l)$	非負	自由	ゼロ	自由

$X(I-l,J,K+l)$ は $X(I,J,K)$ の定義の $x_l \geq 0$ を $x_l = 0$ に換えた物なので $X(I,J,K) \supseteq X(I-l,J,K+l)$ が成り立つ. よって $X(I-l,J,K+l) \neq \emptyset$ ならば $X(I,J,K) \neq \emptyset$ である. ゆえに $X(I-l,J,K+l)=\emptyset$ の場合のみ議論する. 帰納法の仮定より, $X(I-l,J,K+l)$ と $Y(I-l,J,K+l)$ は丁度一方が非空となる事から, $Y(I-l,J,K+l)$ が非空の場合のみ議論する.

同様に, $Y(I-l,J+l,K)$ の定義は $Y(I,J,K)$ の定義の $\boldsymbol{y}^\top A_l \geq 0$ を $\boldsymbol{y}^\top A_l = 0$ に換えた物なので, $Y(I,J,K) \supseteq Y(I-l,J+l,K)$ が成り立ち, $Y(I-l,J+l,K) \neq \emptyset$ ならば $Y(I,J,K) \neq \emptyset$ である. ゆえに $Y(I-l,J+l,K)=\emptyset$ の場合のみ議論する. 帰納法の仮定より, 2 つの集合 $X(I-l,J+l,K)$ と $Y(I-l,J+l,K)$ は丁度一方が非空なので, $X(I-l,J+l,K)$ が非空の場合のみ議論する.

上記より, 以下の要素が存在する場合のみ議論すれば良い; $\exists \overline{\boldsymbol{x}} \in X(I-l,J+l,K)$, $\exists \overline{\boldsymbol{y}} \in Y(I-l,J,K+l)$.
(i) $\overline{x}_l \geq 0$ ならば, $\overline{\boldsymbol{x}}$ は $X(I,J,K)$ の要素である.
(ii) $\overline{\boldsymbol{y}}^\top A_l \geq 0$ ならば, $\overline{\boldsymbol{y}}$ は $Y(I,J,K)$ の要素である.
(iii) $\overline{x}_l < 0$ かつ $\overline{\boldsymbol{y}}^\top A_l < 0$ の場合.

$$0 > \overline{\boldsymbol{y}}^\top \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{y}}^\top (A\overline{\boldsymbol{x}}) = \sum_{i\in I-l} \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_i \overline{x}_i + \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_l \overline{x}_l + \sum_{i\in J\cup K} \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_i \overline{x}_i = \sum_{i\in I-l} \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_i \overline{x}_i + \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_l \overline{x}_l \geq \overline{\boldsymbol{y}}^\top A_l \overline{x}_l > 0$$

となり, 矛盾である. ■

補題 **1:** M を $m \times n$ 行列とする. 以下の 2 つの集合のうち丁度 1 つが要素を持つ.

$$X(M,\boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n | M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}, \quad Y(M,\boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^m | \boldsymbol{y}^\top M = \mathbf{o}^\top,\ \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} > 0\}.$$

注: $|I|=0$ の場合の Farkas の補題において, $\{A_i \mid i \in J\}$ 中の縦ベクトルを並べた行列を M とすると, 上記の補題となる.

証明: ベクトル $\boldsymbol{b}$ を M の列ベクトルの張る線形空間に直交射影して得られるベクトルを $\boldsymbol{b}'$ とし, $\overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}'$ と定義する. 直交射影の定義より [$\exists \overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{b}' = M\overline{\boldsymbol{x}}$] と [$\overline{\boldsymbol{y}}^\top M = \mathbf{o}^\top$] が成り立つ. ゆえに $\overline{\boldsymbol{y}}^\top \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{y}}^\top (\overline{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{b}') = ||\overline{\boldsymbol{y}}||^2 + \overline{\boldsymbol{y}}^\top M\overline{\boldsymbol{x}} = ||\overline{\boldsymbol{y}}||^2 \geq 0$ である.
(i) $\overline{\boldsymbol{y}}^\top \boldsymbol{b} > 0$ ならば, $\overline{\boldsymbol{y}}^\top M = \mathbf{o}^\top$ より $\overline{\boldsymbol{y}} \in Y(M,\boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ となる.
(ii) $\overline{\boldsymbol{y}}^\top \boldsymbol{b} = 0$ ならば, $0 = \overline{\boldsymbol{y}}^\top \boldsymbol{b} = ||\overline{\boldsymbol{y}}||^2$ より $\overline{\boldsymbol{y}} = \mathbf{o}$ が成り立ち, $M\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b}' + \overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{b}$ となり, $\overline{\boldsymbol{x}} \in X(M,\boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ である. ■

最後に, Farkas の補題を用いて双対定理を証明しよう. m,n を任意の正整数とし, $A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を $m \times n$ 実行列, m 次元実ベクトル, n 次元実ベクトルとする. 次の線形計画問題 P とその双対問題 D について議論する.

$$\mathrm{P}\colon \max\{\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}\},$$
$$\mathrm{D}\colon \min\{\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{y}^\top A \geq \boldsymbol{c}^\top\}.$$

弱双対定理: 2 つの線形計画問題 P と D の任意の実行可能解の対 $\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}}$ は, $\boldsymbol{c}^\top \overline{\boldsymbol{x}} \leq \overline{\boldsymbol{y}}^\top \boldsymbol{b}$ を満たす.

証明： 問題 P, D の定義と $\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}}$ が各々の実行可能解である事から $\overline{\boldsymbol{y}}^\top \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{y}}^\top A\overline{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{c}^\top \overline{\boldsymbol{x}}$ となる. ■

強双対定理: 2 つの線形計画問題 P と D のどちらも実行可能解を持つならば, P と D のいずれも最適解を持ち, 最適値は一致する.

証明： 不等式系

$$X = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n, \boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^m \;\middle|\; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o},\ A^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \right\}$$

について議論する. X が空でなく, 要素 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を持つならば, 弱双対定理より明らかに $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ はそれぞれ P と D の最適解であり, P と D の最適値も一致する. 以下では, P, D がそれぞれ実行可能解を持つにもかかわらず, X が空であると仮定をして矛盾を導く. スラック変数 $\boldsymbol{s}$ を導入し, X の不等式系を見やすく書くと,

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & \multicolumn{2}{c|}{\mathrm{O}} \\ \hline \mathrm{O} & \multirow{2}{*}{I} & -A^\top \\ \cline{1-1}\cline{3-3} -\boldsymbol{c}^\top & & \boldsymbol{b}^\top \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c} \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{o},\ \boldsymbol{s} \geq \mathbf{o},$$

となる. ただし, I は単位行列を表し, O は適当なサイズの零行列を表す. Farkas の補題 (一般形) より, X が空ならば次の線形不等式系の解集合

$$Y = \left\{ (\boldsymbol{w}^\top, \boldsymbol{z}^\top, q)^\top \in \mathrm{R}^{m+n+1} \;\middle|\; \boldsymbol{w}^\top A - q\boldsymbol{c}^\top \geq \mathbf{o}^\top,\ \boldsymbol{z}^\top \geq \mathbf{o}^\top, q \geq 0,\ -\boldsymbol{z}^\top A^\top + q\boldsymbol{b}^\top = \mathbf{o}^\top,\ \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{b} - \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{c} < 0 \right\}$$

が非空となる. 以下では Y が要素 $(\overline{\boldsymbol{w}}^\top, \overline{\boldsymbol{z}}^\top, \overline{q})^\top$ を持つと仮定して矛盾を導く. $\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}}$ を P, D の実行可能解とすると, 弱双対定理より $\boldsymbol{c}^\top \overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}}^\top \boldsymbol{b} \geq 0$ が成り立つが,

$$0 > \overline{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}^\top \overline{\boldsymbol{z}} = \overline{\boldsymbol{w}}^\top A\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{c}^\top \overline{\boldsymbol{z}} \geq \overline{q}\boldsymbol{c}^\top \overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{c}^\top \overline{\boldsymbol{z}} \geq \overline{q}\boldsymbol{c}^\top \overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}}^\top A\overline{\boldsymbol{z}} = \overline{q}\boldsymbol{c}^\top \overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}}^\top \overline{q}\boldsymbol{b} = \overline{q}(\boldsymbol{c}^\top \overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}}^\top \boldsymbol{b}) \geq 0.$$

となり矛盾. ■

6.2 行列形式での双対最適解

基底行列 B に対応する基底解が最適解のとき, $\boldsymbol{y} \equiv \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}$ とすると,

$$\boldsymbol{y}^\top A = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}[B|N] = (\boldsymbol{c}_B^\top, \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1} N) \geq (\boldsymbol{c}_B^\top, \boldsymbol{c}_N^\top) = \boldsymbol{c}^\top$$

より $\boldsymbol{y}$ は許容解であり，$\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{x}_B$ より目的関数値が一致している．

右辺項 $\boldsymbol{b}$ の第 j 要素が微小量 ε だけ増えて、右辺項が $\boldsymbol{b}+\varepsilon\boldsymbol{e}_j$ となったとき、$(\boldsymbol{x}_B^\top, \boldsymbol{x}_N^\top) = ((B^{-1}\boldsymbol{b})^\top, \mathbf{o}^\top)$ は $((B^{-1}(\boldsymbol{b} + \varepsilon\boldsymbol{e}_j))^\top, \mathbf{o}^\top)$ に動き、目的関数値は $\boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{c}_B^\top (B^{-1}\boldsymbol{b} + \varepsilon\boldsymbol{e}_j)$ となる。この時の変位は $\boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{e}_j = y_j$ となる。ゆえに、y_j は右辺項の第 j 要素の微小変動に対する、目的関数値の変動を表していると考えられる。このことから、資源配分問題に対する双対最適解 y_j を資源 j の潜在価格と呼ぶ事がある。

7　相補スラック定理

以下のような線形計画について議論する．

$$\begin{array}{lll} \text{D:} & \min. & \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} \\ & \text{s. t.} & \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{a}_i \geq c_i \ (i = 1, 2, \ldots, n). \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{P:} & \max. & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ & \text{s. t.} & \sum_{i=1}^n \boldsymbol{a}_i x_i = \boldsymbol{b}, \\ & & x_i \geq 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, n), \end{array}$$

相補スラック定理は以下のようになる

相補スラック定理

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を P, D それぞれの許容解とするとき，以下の条件は同値である．

(1) $\boldsymbol{x}$ は P の最適解であり， かつ，$\boldsymbol{y}$ は D の最適解である．

(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は次の性質を満たす． (2-1) $x_i > 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{a}_i = c_i$, (2-2) $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{a}_i > c_i \quad \rightarrow \quad x_i = 0$.

証明：(1) → (2)： 強双対定理より，$\sum_{i=1}^n c_i x_i = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}^\top \sum_{i=1}^n \boldsymbol{a}_i x_i = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{a}_i x_i$ となり、これより $\sum_{i=1}^n (\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{a}_i - c_i) x_i = 0$ である．$\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{a}_i - c_i \geq 0$ かつ $x_i \geq 0$ より， 各 i について $(\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{a}_i - c_i) x_i = 0$ である．

(2) → (1)：上記を逆にたどることによって強双対定理が成り立つ． //

以下では，相補スラック定理の力学モデルによる解釈を行う．D の各制約式を適当に定数倍することにより，ベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の長さはすべて 1 となっているとする．図 3 は，問題 D を図示したものとする．制約式の不等式の方向から分かるように，ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ は，制約 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{a}_i \leq c_i$ の境界の超平面と直交し，許容領域方向を向いているベクトルである．

ここで図 4 のような，構造物を考えよう．制約式のところに壁を置き，目的関数の減少方向が最急降下方向になるように，板を傾けた物である．この壁の中で (単位重さ) の十分小さな玉を転がすと，日常的な経験から 玉は問題 D の最小点で留まることが分かるだろう．最小点で静止した玉のつりあいの式を考えよう．制約 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{a}_i \geq b_i$ の壁が斜面に並行に玉を押す力を x_i とすると，玉を斜面に沿って下に引っ張る力ベクトルを $-\boldsymbol{b}$ とすると，斜面に平行な力のつりあいの式は $-\boldsymbol{b} + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{a}_i x_i = \mathbf{o}$ となる ($\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の長さが 1 であることから導かれる)．これは双対問題の等式制約に他ならない．壁の押す力は抗力であるから (引っ張ることは出来ないから) $x_i \geq 0$ でなければならない．これで双対問題の制約式はすべて出現した．最後に相補条件を解釈しよう．(1) 玉を押している ($x_i > 0$ である) 壁は，玉に接触していなければならない，すなわち玉の位置を $\boldsymbol{y}$ とすれば $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{a}_i = b_i$ である．(2) 玉と接触していない壁 ($\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{a}_i > b_i$ を満たしている壁) は玉を押すことは出来ない，すなわち $x_i = 0$ である.

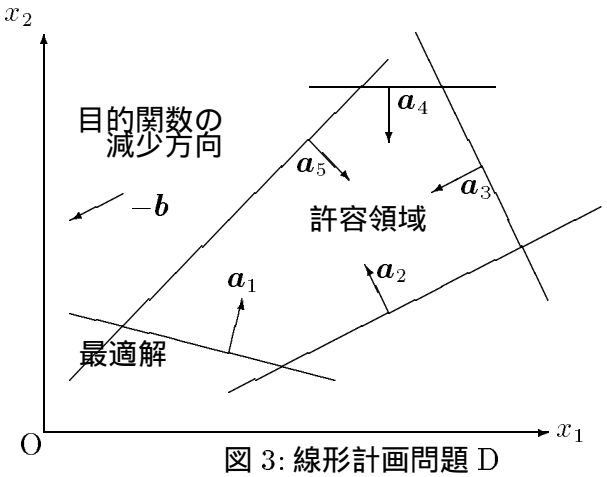

図 3: 線形計画問題 D

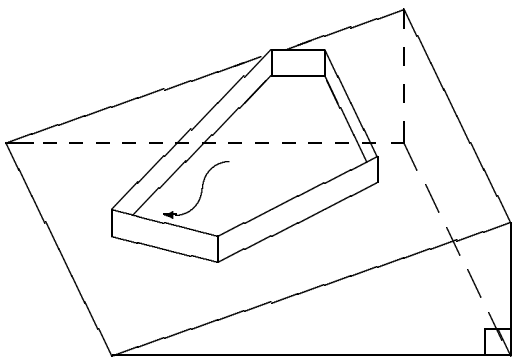

図 4: 構造物

8　生産計画ゲーム

- $N = \{1, 2, \ldots, n\}$: プレイヤーの集合.
- J：資源の集合.
- $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n \in \mathrm{R}_+^J$： 各プレイヤーの持っている資源量ベクトル (非負) .
- $z(\boldsymbol{b})$：資源量ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathrm{R}_+^J$ のもとで， 生産を行った際の収益.
  すなわち $z(\boldsymbol{b}) = \max\{\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}\}$ で定義される．
- 提携：プレイヤーの部分集合
- $v : 2^N \to \mathrm{R}$: 提携 S 中のプレイヤーの資源を 集めて生産したときの，収益．
  すなわち $v(S) = z(\sum_{i \in S} \boldsymbol{b}_i) = \max\{\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}\}$ で定義される．
- 配分：以下を満たすベクト $\boldsymbol{p} \in \mathrm{R}^N$,
  $(1)\ p_1 + \cdots + p_n = v(N)$, $(2)\ \forall i \in N,\ p_i \geq v(\{i\})$.
- コア：次の性質を満たす配分 $\boldsymbol{p}$, $\forall S \subseteq N,\ \sum_{i \in S} p_i \geq v(S)$.

定理 1 生産計画ゲームは，非空のコアを持つ．

証明: $\max\{\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}\}$ の双対問題は， $\min\{\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{y}^\top A \geq \boldsymbol{c}^\top,\ \boldsymbol{y} \geq \mathbf{o}\}$. 双対最適解を $\overline{\boldsymbol{y}}$ とし， $p_i = \overline{\boldsymbol{y}}^\top \boldsymbol{b}_i$ とする．明らかに $p_1 + \cdots + p_n = v(N)$. 問題 $\mathrm{D}(S)$ を $\boldsymbol{y}^\top(\sum_{i \in S} \boldsymbol{b}_i) \mid \boldsymbol{y}^\top A \geq \boldsymbol{c}^\top,\ \boldsymbol{y} \geq \mathbf{o}\}$ と定義する. $\mathrm{D}(S)$ の最適値は $v(S)$ である．任意の提携 S に対し，$\overline{\boldsymbol{y}}$ は $\mathrm{D}(S)$ の許容解であるから， $\overline{\boldsymbol{y}}^\top(\sum_{i \in S} \boldsymbol{b}_i) \mid v(S)$ が成り立つ．■

9　2 人ゼロ和ゲーム

- A, B：プレイヤー
- I, J: プレイヤー A, B の戦略の集合
- M：行と列が，それぞれ I, J で インデックスされた行列であり， 要素 m_{ij} は，プレイヤー A が戦略 i を プレイヤー B が戦略 j を取ったときの， プレイヤー A の利得を表す．
- 2 人非ゼロ和ゲーム： プレイヤー数が 2 人のゲームで， プレイヤー B の利得と， プレイヤー A の利得の和がいつでもゼロになるゲーム．
- 混合戦略： $X_A = \{\boldsymbol{p} \in \mathrm{R}^I \mid \boldsymbol{p} \geq \mathbf{o},\ \sum_{i \in I} p_i = 1\}$ $X_B = \{\boldsymbol{q} \in \mathrm{R}^J \mid \boldsymbol{q} \geq \mathbf{o},\ \sum_{j \in J} q_j = 1\}$
- $(\overline{\boldsymbol{p}}, \overline{\boldsymbol{q}})$ が Nash 均衡点： $(\overline{\boldsymbol{p}}, \overline{\boldsymbol{q}}) \in X_A \times X_B,\ \forall \boldsymbol{p} \in X_A,\ \boldsymbol{p}^\top A\overline{\boldsymbol{q}} \leq z$, かつ $\forall \boldsymbol{q} \in X_B,\ \overline{\boldsymbol{p}}^\top(-A)\boldsymbol{q} \leq z$, ただし $z = \overline{\boldsymbol{p}}^\top A\overline{\boldsymbol{q}}$.

定理 2 *2* 人ゼロ和ゲームは，常に *Nash* 均衡点を持つ．

証明: $\overline{\boldsymbol{y}}$ を，LP 問題 $\min\{z \mid z\mathbf{1} \geq A\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} \in X_B\}$ の最適解とする． この問題を $\min\{z \mid \mathbf{1}z - A\boldsymbol{y} \geq \mathbf{o},\ \mathbf{1}^\top \boldsymbol{y} = 1,\ \boldsymbol{y} \geq \mathbf{o}\}$ と書くと, 双対問題は， $\max\{z' \mid -\boldsymbol{x}^\top A + z'\mathbf{1}^\top \leq \mathbf{o},\ \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} = 1,\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}\}$ すなわち $\max\{z' \mid z'\mathbf{1}^\top \leq \boldsymbol{x}^\top A,\ \boldsymbol{x} \in X_A\}$ である．$\overline{\boldsymbol{x}}$ を双対問題の最適解とする． 以下では $(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}})$ が Nash 均衡点である事を示す.

上記の線形計画問題の最適値を z^* とすると， $z^* = z^*\overline{\boldsymbol{x}}^\top \mathbf{1} \geq \overline{\boldsymbol{x}}^\top A\overline{\boldsymbol{y}} \geq z^*\mathbf{1}^\top \overline{\boldsymbol{y}} = z^*$ より $z^* = \overline{\boldsymbol{x}}^\top A\overline{\boldsymbol{y}}$ である． また,

$$\begin{aligned} &\forall \boldsymbol{x} \in X_A, \quad \boldsymbol{x}^\top A\overline{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{x}^\top(z^*\mathbf{1}) = z^* = \overline{\boldsymbol{x}}^\top A\overline{\boldsymbol{y}}, \\ &\forall \boldsymbol{y} \in X_B, \quad \overline{\boldsymbol{x}}^\top(-A)\boldsymbol{y} \leq -z^*\mathbf{1}^\top \boldsymbol{y} = -z^* = -\overline{\boldsymbol{x}}^\top A\overline{\boldsymbol{y}} \end{aligned}$$

が成り立つ．■

10 分数計画

線形分数計画は以下のように定式化される．

$$\begin{array}{rll} \text{FP:} & \text{minimze} & (\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x})/(\boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \end{array}$$

ただし，$\forall \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \ \rightarrow \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{x} > 0$ が成り立つとする．

定理 3 $\boldsymbol{x}$ が FP の最適解であることと，$\boldsymbol{x}$ が線形計画問題 $\min\{\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{y} \mid A\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}z = \mathbf{o},\ \ \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y} = 1\}$ の最適解である事は同値．

証明: 与えられた分数計画において，$z = 1/(\boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y} = (1/z)\boldsymbol{x}$ として変数変換を行えば良い．■

11 無料ソフトウェア

- `http://www.saitech-inc.com/math.htm#sopt`
  SOPT demonstration software
- `http://www.sor.princeton.edu/~rvdb/JAVA/pivot/simple.html`
  Simplex Pivot Tool (JAVA による辞書表示)
- `http://www.lindo.com/`
  free download versions of LINDO software
- `http://www.dash.co.uk/`
  free student edition of XPRESS-MP
- `ftp://ftp.es.ele.tue.nl/pub/lp_solve`
  public domain soft lp-solve (windows 版： lp20w95.zip)
  日本語マニュアル
  `http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~tomomi/soft/manual_LPsolve .html`
- `http://ford.ieor.berkeley.edu/~ilan/project.html`
  two-dimensional graphical interface
- `http://www-unix.mcs.anl.gov/otc/Guide/faq/`
  Linear Programming FAQ

References

[1] 伊理正夫, 「線形計画法」, 共立出版, 1986.

[2] 今野浩, 「線形計画法」, 日科技連出版社, 1987.