

Bland の最小添字規則の有限性 — 単体法の非巡回ピヴォット規則 —

東京工業大学 松井知己

本稿では、線形計画法を解く単体法のピヴォット規則である Bland の最小添字 (そえじ) 規則 [1] の有限性の証明を記す。証明自体は新しいものではなく、コンパクトに書かれることの多い証明を、少し丁寧に記載したものである。単体法について一通り学んでいる読者を想定している。

本稿で扱う線形計画問題は

$$\begin{aligned} \text{P: } \quad & \max. \quad z = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ & \text{s.t.} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

という形式である。ただし、 z は目的関数値を表す変数である。変数ベクトル \mathbf{x} の添字集合を $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ とする。添字集合 E は、ベクトル \mathbf{c} と行列 A の列の添字集合でもある。任意の添字部分集合 $S \subseteq E$ に対し、 \mathbf{x}_S は \mathbf{x} の部分ベクトルで、 S 中の添字に対応する変数からなるものとし、 A_S は A の部分行列で、 S 中の添字に対応する A の列ベクトルからなる行列とする。ベクトル \mathbf{c} に対しても、 \mathbf{c}_S を同様に定める。

添字部分集合 $B \subseteq E$ に対し、 $N = E \setminus B$ とすると、等式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を $A_B\mathbf{x}_B + A_N\mathbf{x}_N = \mathbf{b}$ と書くことができる。添字部分集合 $B \subseteq E$ に対し、行列 A_B が逆行列を持つとき、 B は**基底**であると言う。以下では、 B を基底とし、 $N = E \setminus B$ として話を進める。等式 $A_B\mathbf{x}_B + A_N\mathbf{x}_N = \mathbf{b}$ の両辺に左から行列 A_B^{-1} をかけて変形すると、

$$\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b} - A_B^{-1}A_N\mathbf{x}_N \tag{1}$$

が得られる。式 (1) を満たすベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}$ の目的関数値 z は

$$z = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = \mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^\top \mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N^\top - \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1}A_N)\mathbf{x}_N \tag{2}$$

と表すことができる。以下では、与えられた基底 B と $N = E \setminus B$ に対し、

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{d}} &= \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1}\mathbf{b}, \\ \tilde{\mathbf{b}} &= A_B^{-1}\mathbf{b}, \\ \tilde{\mathbf{c}}^\top &= \mathbf{c}_N^\top - \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1}A_N, \\ \tilde{A} &= A_B^{-1}A_N, \end{aligned}$$

と書く. このとき式 (2) と式 (1) を

$$\begin{aligned} z &= \tilde{d} + \tilde{c}^\top \mathbf{x}_N, \\ \mathbf{x}_B &= \tilde{\mathbf{b}} - \tilde{A} \mathbf{x}_N, \end{aligned}$$

と書き直すことができる. 上記の等式系を基底 B に対する**辞書**と呼ぶ. また, 上記の等式系の右辺の定数項と係数からなる行列

$$\left(\begin{array}{c|c} \tilde{d} & \tilde{c}^\top \\ \hline \tilde{\mathbf{b}} & -\tilde{A} \end{array} \right)$$

も, 基底 B に対する**辞書**と呼ぶ. 辞書の定義より次の補題が成り立つ.

補題 1. 任意の基底 B と $N = E \setminus B$ に対し, 以下が成り立つ.

(a) ベクトル \mathbf{x} が, 『 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満たすこと』と 『 $\mathbf{x}_B = \tilde{\mathbf{b}} - \tilde{A}\mathbf{x}_N$ を満たすこと』は必要十分条件である.

(b) ベクトル \mathbf{x} が $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満たすならば, $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} = \tilde{d} + \tilde{c}^\top \mathbf{x}_N$.

ベクトル \mathbf{y} が $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ を満たすならば, $\mathbf{c}^\top \mathbf{y} = \tilde{c}^\top \mathbf{y}_N$.

基底と辞書の定義より, 上記は自明であり, 証明の記述は省略する. (b) の後半は, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ とすることで容易に得られる.

与えられた基底 B に対し, ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ を B の**基底解**と呼ぶ. 補題 1

より基底解は等式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満たし, その目的関数値は \tilde{d} となる. 基底解が非負ベクトルのとき**実行可能基底解**と呼び, 対応する基底を**実行可能基底**と呼ぶ.

以下の2つの定理は, Bland の最小添字規則 (を含む一般の主単体法) の正当性に関するものである. 最小添字規則の有限性の証明においては, 直接には不要である. 下記2つの定理の証明は, 本稿末尾の補足に記す.

定理 2. 与えられた基底 B に対し, $\tilde{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ かつ $\tilde{\mathbf{c}} \leq \mathbf{0}$ が成り立つならば, B の基底解は問題 P の最適解である.

定理 3. 問題 P は実行可能解を持つとする. 与えられた基底 B に対し, ある添字 $s \in N = E \setminus B$ が存在して, $\tilde{\mathbf{c}}$ の添字 s の要素が正であり ($\tilde{c}_s > 0$), かつ, 行列 $-\tilde{A}$ の列ベクトルで, 添字 s の列ベクトルが非負ベクトル ($-\tilde{A}_{\{s\}} \geq \mathbf{0}$) ならば, 問題 P は非有界である.

以下は、掃き出し法(ピヴォット)に関する性質である.

性質 4. 与えられた基底 B に対し, 添字対 (s, t) が存在して $s \notin B \ni t$ と $\tilde{a}_{ts} \neq 0$ を満たすならば, $B' = B \cup \{s\} \setminus \{t\}$ は基底となる. 基底 B' に対する基底解 \mathbf{x}' は,

$$x'_i = \begin{cases} \tilde{b}_t & (j = s), \\ \tilde{a}_{ts} & (i \in E \setminus (B \cup \{s\})), \\ \tilde{b}_i - \tilde{a}_{is} \frac{\tilde{b}_t}{\tilde{a}_{ts}} & (i \in B), \end{cases} \quad (3)$$

となり, その目的関数値 \tilde{d}' は

$$\tilde{d}' = \tilde{d} + \frac{\tilde{b}_t}{\tilde{a}_{ts}} \tilde{c}_s \quad (4)$$

となる.

本稿では性質 4 の証明を省略するが, 自明ではなく, 証明は少し長い. 単体法について学んだ読者であれば, 既知の性質であろう.

与えられた基底 B に対し, 添字対 (s, t) が存在して $s \notin B \ni t$ と $\tilde{a}_{ts} \neq 0$ を満たすとき, 基底を B から $B \cup \{s\} \setminus \{t\}$ に更新する操作を**ピヴォット**と呼ぶ. 基底 B を $B \cup \{s\} \setminus \{t\}$ に更新するピヴォットにおいて, $\tilde{b}_t = 0$ が成り立っているとき, この操作を特に**退化ピヴォット**と呼ぶ.

補題 5. 基底 B を基底 $B' = B \cup \{s\} \setminus \{t\}$ に更新する操作が退化ピヴォットならば, B に対応する基底解と B' に対応する基底解は, 同一である.

証明の概略: 性質 4 の式 (3) において, $\tilde{b}_t = 0$ とすれば明らかに成り立つ.

後に分るように, 単体法が有限回の反復で終了しない場合は, 退化ピヴォットのみが連続する. 退化ピヴォットの性質は有限性証明の鍵となる.

以下では, Bland の最小添字規則を記述する. 以降では, 与えられた問題 P は実行可能基底を持つと仮定する.

Input: 実行可能基底 B と, 対応する辞書 (実行可能より $\tilde{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$).

Step 1: 現在の基底に対応する辞書において, $\tilde{\mathbf{c}} \leq \mathbf{0}$ ならば, 基底解を出力して終了. (出力した基底解は最適解である.)

Step 2: ベクトル $\tilde{\mathbf{c}}$ の要素で値が正となるものの内, 添字が最小の要素の添字を s とする. ($s \notin B$ である.)

Step 3: 行列 $-\tilde{A}$ の, 添字 s の列ベクトルが非負ベクトル ($-\tilde{A}_{\{s\}} \geq \mathbf{0}$) ならば, 「非有界」と出力して終了.

Step 4: $\min_{i \in B} \left\{ \frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{is}} \mid \tilde{a}_{is} > 0 \right\}$ の最小値を達成する添字を t とする. 最小値を達成する添字が複数ある場合は, その内の最小の添字を t とする.

Step 5: 基底を $B := B \cup \{s\} \setminus \{t\}$ と更新し, 対応する辞書を求めて, Step 1 に戻る.

下記は主単体法に共通する性質である.

補題 6. Bland の最小添字規則によって生成される基底は, 以下を満たす.

- (a) 生成される基底は全て実行可能基底である.
- (b) 生成される基底の列に対応する基底解の列は, 目的関数値が単調非減少である.
- (c) Step 5 における基底の更新前と更新後で, 対応する基底解の目的関数値が同一ならば, Step 5 でのピヴォットは退化している.

証明の概略:

(a) Step 4 より $\tilde{a}_{ts} > 0$ が成り立つことから, 性質 4 より, Step 5 での更新後の添字集合 $B' = B \cup \{s\} \setminus \{t\}$ は基底である. 基底 B' に対応する基底解 x' は式 (3) で表される. Step 4 より $\frac{\tilde{b}_t}{\tilde{a}_{ts}} = \min_{i \in B} \left\{ \frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{is}} \mid \tilde{a}_{is} > 0 \right\}$ が成り立つことから, B が実行可能基底ならば, B' の基底解は非負ベクトルとなる. ゆえに B' は実行可能基底である.

(b) Step 5 での更新後の基底 $B' = B \cup \{s\} \setminus \{t\}$ の基底解の目的関数値は式 (4) で表される. Step 2 より $\tilde{c}_s > 0$, Step 4 より $\tilde{a}_{ts} > 0$, 基底 B が実行可能基底であることから $\tilde{b}_t \geq 0$ が成り立つ. ゆえに $\tilde{d}' \geq \tilde{d}$ が得られる.

(c) Step 5 での更新後の基底 $B' = B \cup \{s\} \setminus \{t\}$ の基底解の目的関数値は式 (4) で表されることから, 更新によって目的関数値が変わらないならば

$$0 = \tilde{d}' - \tilde{d} = \frac{\tilde{b}_t}{\tilde{a}_{ts}} \tilde{c}_s$$

が成り立つ. Step 2 より $\tilde{c}_s > 0$ であり, $\tilde{b}_t = 0$ が得られる. ゆえに, このピヴォットは退化している. \square

上記 (c) の性質は, 任意のピヴォット操作で成立する訳ではなく, Step 2 で $\tilde{c}_s > 0$ を満たす添字 s を選択しているから成立することに注意されたい.

定理 7. 実行可能基底を持つ任意の線計画問題 P に対し以下が成り立つ. P の任意の実行可能基底 B に対し, B を初期基底として Bland の最小添字規則を実行すると, 有限回の反復で終了する.

証明: 背理法で証明する. 問題例 P は, Bland の最小添字規則が有限回の反復で終了しない初期実行可能基底を持つとする. 基底の数は有限であることから, 有限回の反復で終了しないならば, Bland の最小添字規則実行中に複数回出現する実行可能基底が存在する. そのような実行可能基底 (の一つ) を B_0 と書く. 問題例 P に対し, B_0 を初期実行可能基底として Bland の最小添字規則を実行すると, 有限回の反復で基底 B_0 が再び得られる. この間に生成される実行可能基底の列を (B_0, B_1, \dots, B_r) とする, ただし $B_r = B_0$ である.

基底列 (B_0, B_1, \dots, B_r) において, 基底に留まり続ける添字集合を B^\bullet とする, すなわち $B^\bullet = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_r$ である. 更に, 一度も基底に属さない添字の集合を N^\bullet とする, すなわち $N^\bullet = E \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r)$ である. 添字部分集合 $E^\circ = E \setminus (B^\bullet \cup N^\bullet)$ と定義する. 集合 E° 中の任意の添字は, 基底列 (B_0, B_1, \dots, B_r) 中の 1 つ以上の基底に属しており, かつ, その添字が属さない基底が (基底列中に) 1 つ以上存在する. 添字集合 E° 中で最も番号の大きな添字を j とする. (以下ではこの添字 j が重要な役割を果たす.)

基底列 (B_0, B_1, \dots, B_r) が生成される際, 添字 j が基底から外れる直前の基底 (の一つ) を B' とし, それに対応する辞書を

$$\begin{aligned} z &= \tilde{d}' + \tilde{c}'^\top \mathbf{x}_{N'}, \\ \mathbf{x}_{B'} &= \tilde{\mathbf{b}}' - \tilde{A}' \mathbf{x}_{N'}, \end{aligned} \quad (5)$$

とする, ただし $N' = E \setminus B'$ である.

基底 B' から次の基底を作るピヴォットにおいて, $j \in B'$ の代わりに基底に入る添字を $s \in N'$ とする. 添字集合 E を持つベクトル \mathbf{y} を, 式 (5) の係数行列 $-\tilde{A}'$ の第 s 列を用いて

$$y_i = \begin{cases} 1 & (i = s), \\ 0 & (i \in N' \setminus \{s\}), \\ -\tilde{a}'_{is} & (i \in B'), \end{cases}$$

と定める. 明らかに $\mathbf{y}_{B'} = -\tilde{A}'_{\{s\}}$ であり, $\mathbf{y}_{N'}$ は単位ベクトルである. これより

$$\begin{aligned} A\mathbf{y} &= A_{B'}\mathbf{y}_{B'} + A_{N'}\mathbf{y}_{N'} = A_{B'}(\mathbf{y}_{B'} + A_{B'}^{-1}A_{N'}\mathbf{y}_{N'}) \\ &= A_{B'}(\mathbf{y}_{B'} + \tilde{A}'\mathbf{y}_{N'}) = A_{B'}(-\tilde{A}'_{\{s\}} + \tilde{A}'_{\{s\}}) = A_{B'}\mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

が成り立つ. 性質 1(b) より

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{c}}^\top \mathbf{y}_{N'} = \tilde{c}'_s > 0 \quad (6)$$

である. 最後の不等式は, Step 2 で添字 s が選ばれたことから成り立つ.

以下では, 不等式 (6) と矛盾する不等式を導く.

(i) まず最初に, 基底 B' に対応する辞書 (行列) が

$$\left(\begin{array}{c|c} \tilde{d}' & \tilde{c}'^\top \\ \hline \tilde{b}' & -\tilde{A}' \end{array} \right) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ B^\bullet \end{array} \begin{array}{c} s \\ N^\bullet \\ * \quad * \cdots * \quad + \quad * \cdots * \quad * \cdots * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \oplus \\ \vdots \\ \oplus \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

となっていることを示す. ただし \oplus は非負の数を表している.

(i-a) 実行可能基底の列 (B_0, B_1, \dots, B_r) を生成する際に実行されるピヴォットは, すべて退化ピヴォットであることを示す.

補題 6 (b) より, 生成される基底列 (B_0, B_1, \dots, B_r) に対応する基底解の列は, 対応する目的関数が単調非減少である. 基底 $B_0 = B_r$ より, 生成される全ての基底解の目的関数値は, 全て同一である. 補題 6 (c) より, 実行されるピヴォットは, すべて退化ピヴォットとなる.

上記と補題 5 より, 生成される実行可能基底列 (B_0, B_1, \dots, B_r) 中の基底に対応する実行可能基底解はすべて同一の解となる. 以下ではこの実行可能基底解を \mathbf{x}^* と書く.

(i-b) 等式 $\tilde{b}'_i = 0$ ($\forall i \in E^\circ \cap B'$) を示す.

添字集合 E° 中の任意の添字 $i \in E^\circ$ に対し, ある基底 $\hat{B}^{(i)} \in \{B_1, \dots, B_r\}$ が存在して, $i \notin \hat{B}^{(i)}$ を満たす. 解 \mathbf{x}^* は, 基底 $\hat{B}^{(i)}$ の基底解でもあり, $i \notin \hat{B}^{(i)}$ より $x_i^* = 0$ が成り立つ. 以上より $x_i^* = 0$ ($\forall i \in E^\circ$) が得られる. 解 \mathbf{x}^* は, 基底 B' の基底解でもあることから $\mathbf{x}_{B'}^* = \tilde{\mathbf{b}}'$ が成り立ち, $\tilde{b}'_i = x_i^* = 0$ ($\forall i \in E^\circ \cap B'$) が得られる.

(i-c) $\tilde{c}'_s > 0$, $-\tilde{a}'_{js} < 0$, と $-\tilde{a}'_{is} \geq 0$ ($\forall i \in (E^\circ \cap B') \setminus \{j\}$) を示す.

添字 s が Step 2 で選ばれたことから, $\tilde{c}'_s > 0$ は明らか.

添字 j が Step 4 で選ばれたことから, 添字 j は最小値 $\min_{i \in B'} \left\{ \frac{\tilde{b}'_i}{\tilde{a}'_{is}} \mid \tilde{a}'_{is} > 0 \right\}$ を達成する. ゆえに $\tilde{a}'_{js} > 0$, すなわち $-\tilde{a}'_{js} < 0$ が成り立つ.

ある添字 $i^* \in (E^\circ \cap B') \setminus \{j\}$ において $-\tilde{a}'_{i^*s} < 0$ が成り立っていると仮定して, 矛盾を導く. (i-b) から $\tilde{b}'_{i^*} = 0$ が成り立ち, 仮定 $\tilde{a}'_{i^*s} > 0$ より

$$0 = \frac{0}{\tilde{a}'_{i^*s}} = \frac{\tilde{b}'_{i^*}}{\tilde{a}'_{i^*s}} \geq \min_{i \in B'} \left\{ \frac{\tilde{b}'_i}{\tilde{a}'_{is}} \mid \tilde{a}'_{is} > 0 \right\} \geq 0$$

となる. 上式と仮定 $\tilde{a}'_{i^*s} > 0$ より, 添字 i^* は Step 4 での最小値を達成する添字の一つとなる. 性質 $i^* \in E^\circ \setminus \{j\}$ より $i^* < j$ が成り立ち, 添字 i^* より大きな添字 j が Step 4 で選ばれたことになり, 矛盾.

上記 (i-c) と $\mathbf{y}_{B'} = -\tilde{A}'_{\{s\}}, \mathbf{y}_{N'} \geq \mathbf{0}$ ($\mathbf{y}_{N'}$ は単位ベクトルより) から,

$$y_j = -\tilde{a}'_{js} < 0 \text{ と } y_i \geq 0 \quad (\forall i \in E^\circ \setminus \{j\}) \quad (7)$$

が得られる. (性質 (7) の後半は (i-c) より i の取る範囲が広いことに注意. 下記 (iii) で \mathbf{y} の要素を並び替えた図を参照されたい.) 性質 (7) は下記証明の (iii) で用いる.

(ii) 基底列 (B_0, B_1, \dots, B_r) が生成される際, 添字 j が基底に入る直前の基底 (の一つ) を B'' とする. 以下では基底 B'' に対応する辞書

$$\begin{aligned} z &= \tilde{d}'' + \tilde{\mathbf{c}}''^\top \mathbf{x}_{N''}, \\ \mathbf{x}_{B''} &= \tilde{\mathbf{b}}'' - \tilde{A}'' \mathbf{x}_{N''}, \end{aligned}$$

(ただし $N'' = E \setminus B''$) において

$$\tilde{\mathbf{c}}''^\top = \begin{array}{|c|c|c|} \hline N'' \setminus (N^\bullet \cup \{j\}) & j & N^\bullet \\ \hline \ominus \cdots \cdots \ominus & + & * \cdots * \\ \hline \end{array}$$

となっていることを示す. ただし \ominus は非正の数を表している.

(ii-a) Step 2 で添字 j が選択されたことから, $\tilde{c}''_j > 0$ は明らかである.

(ii-b) 任意の添字 $i \in N'' \setminus (N^\bullet \cup \{j\})$ において, $\tilde{c}''_i \leq 0$ を示す.

ここで $\exists i^* \in N'' \setminus (N^\bullet \cup \{j\}), \tilde{c}''_{i^*} > 0$ と仮定する. 性質 $i^* \in N'' \setminus (N^\bullet \cup \{j\}) = (E^\circ \cap N'') \setminus \{j\} \subseteq E^\circ \setminus \{j\}$ より $i^* < j$ が成り立ち, 添字 i^* より大きな添字 j が Step 2 で選択されたこととなり, 矛盾.

(iii) 最後に, 性質 1(b) と $\tilde{\mathbf{c}}''$ を利用して, $\mathbf{c}^\top \mathbf{y} < 0$ を導く.

(i) と (ii) で得られた性質より, \mathbf{y} の要素を並び替えて $\tilde{\mathbf{c}}''$ と並べると,

$$\mathbf{y}^\top = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & \multicolumn{3}{B'} & \multicolumn{3}{N'} & \\ \hline & B^\bullet & & j & & s & & N^\bullet \\ \hline * \cdots * & \oplus \cdots \oplus & - & 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{y}^\top = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & \multicolumn{2}{B''} & \multicolumn{3}{N''} & \\ \hline & B^\bullet & & N'' \setminus (N^\bullet \cup \{j\}) & j & N^\bullet & \\ \hline * \cdots * & \oplus \cdots \oplus & \oplus \cdots \oplus & - & 0 \cdots 0 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\tilde{\mathbf{c}}''^\top = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \multicolumn{2}{N''} & \\ \hline & N'' \setminus (N^\bullet \cup \{j\}) & j & N^\bullet \\ \hline \ominus \cdots \cdots \ominus & + & * \cdots * & \\ \hline \end{array}$$

となっている.

性質 1(b) と $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$, 及び $N'' \setminus (N^\bullet \cup \{j\}) = (E^\circ \cap N'') \setminus \{j\}$ が成り立つことより,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^\top \mathbf{y} &= \tilde{\mathbf{c}}''^\top \mathbf{y}_{N''} = \sum_{i \in N'' \setminus (N^\bullet \cup \{j\})} \tilde{c}_i'' y_i + \tilde{c}_j'' y_j + \sum_{i \in N^\bullet} \tilde{c}_i'' y_i \\ &= \sum_{i \in (E^\circ \cap N'') \setminus \{j\}} \tilde{c}_i'' y_i + \tilde{c}_j'' y_j \leq \tilde{c}_j'' y_j = \tilde{c}_j'' (-\tilde{a}_{js}'') < 0 \end{aligned}$$

が得られる. ただし上記二か所の不等号は, $(E^\circ \cap N'') \setminus \{j\} \subseteq E^\circ \setminus \{j\}$ と, 性質 (7), (ii-a), (ii-b) より導かれる. 上記不等式は, 式 (6) と矛盾. \square

補足 (定理 2 と定理 3 の証明)

補題 1 より, 任意の基底 B に対し問題 P を

$$P(B): \quad \max. \quad z = \tilde{d} + \tilde{c}^\top \mathbf{x}_N$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{x}_B = \tilde{\mathbf{b}} - \tilde{A} \mathbf{x}_N, \mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0},$$

と書き換えることができる. 正確には, 問題 P と問題 $P(B)$ は許容領域が同一であり, 任意の許容解に対し目的関数値が一致する.

基底 B に対応する辞書が

*	⊖ ····· ⊖
⊕	
⋮	
⋮	
⊕	

最適辞書

*	* ····· *
*	
⋮	
*	
-	
t	⊖ ····· ⊖

主不能辞書

*	* ····· *	s
*		+
⋮		
⋮		
*		
*	⊕	

双対不能辞書

となっているとき, 以下の性質が成り立つ. ただし \ominus は非正の数値を, \oplus は非負数値を表している. 以下の定理は, 定理 2 と定理 3 を含んでいる.

定理 8.

最適辞書 与えられた基底 B の辞書が「 $\tilde{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ かつ $\tilde{\mathbf{c}} \leq \mathbf{0}$ 」を満たすとき, 最適辞書と呼ぶ. 最適辞書の基底解は問題 P の最適解である.

主不能辞書 与えられた基底 B に対し, ある添字 $t \in B$ が存在して, B の辞書が「 $\tilde{b}_t < 0$, かつ, 行列 $-\tilde{A}$ の t 行の要素が全て非正」を満たすとき, 主不能辞書と呼ぶ. 問題 P が主不能辞書を持つならば, 問題 P は実行可能解を持たない.

双対不能辞書 与えられた基底 B に対し, ある添字 $s \in N = E \setminus B$ が存在して, B の辞書が「 $\tilde{c}_s > 0$, かつ, $-\tilde{A}_{\{s\}} \geq \mathbf{0}$ 」を満たすとき, 双対不能辞書と呼ぶ. 問題 P が実行可能で双対不能辞書を持つならば, 問題 P は非有界である.

最適辞書 (定理 2) の証明: 以下では, $\tilde{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ かつ $\tilde{\mathbf{c}} \leq \mathbf{0}$ が成り立つならば, B の基底解は問題 $P(B)$ の最適解であることを示す. 基底解 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ が問題 $P(B)$ の等式制

約を満たす事は明らか. 性質 $\tilde{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ より, B の基底解は非負ベクトルである. ゆえに, B の基底解は問題 $P(B)$ の許容解となっている. この基底解の目的関数値は \tilde{d} である.

性質 $\tilde{\mathbf{c}} \leq \mathbf{0}$ より, 問題 $P(B)$ の目的関数値係数は非正であり, 制約式 $\mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$ より, 問題 $P(B)$ の最適値は定数項 \tilde{d} 以下である.

以上より, B の基底解は問題 $P(B)$ の最適解となり, 問題 P の最適解でもある.

主不能辞書の証明: 行列 $-\tilde{A}$ の t 行の行ベクトルを $-\tilde{\mathbf{a}}^\top \leq \mathbf{0}$ とする. 問題 $P(B)$ の等式制約は, $x_t = \tilde{b}_t - \tilde{\mathbf{a}}^\top \mathbf{x}_N$ を含んでいる. 問題 P が実行可能解 $\hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$ を持つと仮定すると, $0 \leq \hat{x}_t = \tilde{b}_t - \tilde{\mathbf{a}}^\top \hat{\mathbf{x}}_N < -\tilde{\mathbf{a}}^\top \hat{\mathbf{x}}_N \leq 0$ が成り立ち, 矛盾.

双対不能辞書 (定理 3) の証明: 以下では, 問題 $P(B)$ は実行可能解を持つとき, $\tilde{c}_s > 0$ かつ $-\tilde{A}_{\{s\}} \geq \mathbf{0}$ ならば, 問題 $P(B)$ が非有界であることを示す. 問題 $P(B)$ の実行可能解の一つを $\hat{\mathbf{x}}$ とする. 添字集合 E を持つベクトル \mathbf{y} を

$$y_i = \begin{cases} 1 & (i = s), \\ 0 & (i \in N \setminus \{s\}), \\ -\tilde{a}_{is} & (i \in B), \end{cases}$$

と定める. 明らかに $\mathbf{y}_B = -\tilde{A}_{\{s\}} \geq \mathbf{0}$ であり, \mathbf{y}_N は単位ベクトルである.

任意の非負の値 $\lambda \geq 0$ に対し $\hat{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{y}$ が許容解であることを示す. 性質 1(a) と $A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ より

$$\tilde{\mathbf{b}} - \tilde{A}\hat{\mathbf{x}}_N = \hat{\mathbf{x}}_B$$

が成り立つ. 同様に,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}} - \tilde{A}(\hat{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{y})_N &= \tilde{\mathbf{b}} - \tilde{A}(\hat{\mathbf{x}}_N + \lambda \mathbf{y}_N) = (\tilde{\mathbf{b}} - \tilde{A}\hat{\mathbf{x}}_N) - \lambda \tilde{A}\mathbf{y}_N \\ &= \hat{\mathbf{x}}_B - \lambda \tilde{A}_{\{s\}} = \hat{\mathbf{x}}_B + \lambda \mathbf{y}_B = (\hat{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{y})_B \end{aligned}$$

を満たすことから, 性質 1(a) より $A(\hat{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{y}) = \mathbf{b}$ が成り立つ.

仮定より, $\hat{\mathbf{x}}$ と \mathbf{y} はどちらも非負ベクトルであり, $\lambda \geq 0$ より, $\hat{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{y}$ は非負ベクトルである. ゆえに $\hat{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{y}$ は許容解である.

対応する目的関数値は

$$z = \tilde{d} + \tilde{\mathbf{c}}^\top (\hat{\mathbf{x}}_N + \lambda \mathbf{y}_N) = \tilde{d} + \tilde{\mathbf{c}}^\top \hat{\mathbf{x}}_N + \lambda \tilde{\mathbf{c}}^\top \mathbf{y}_N = \tilde{d} + \tilde{\mathbf{c}}^\top \hat{\mathbf{x}}_N + \lambda \tilde{c}_s$$

と書ける. 仮定より $\tilde{c}_s > 0$ である. ゆえに, 任意の数 M に対し, λ を十分大きな正の数とすれば, 目的関数値が M より大きな実行可能解が存在する. ゆえに問題 $P(B)$ は非有界であり, 問題 P も非有界である. \square

上記定理の「双対不能辞書」は、双対問題が実行不能となる辞書である。本稿では、読者に双対問題の知識が無くとも良いように配慮した結果、上記のように(少し長い)非有界性の証明を記載している。

上記定理中の三つの辞書を**終了辞書**と呼ぶ。線形計画問題については、以下が成り立つことが知られている。

定理 9. 問題 P が基底を持つならば、三つの終了辞書の内、どれか一つ(以上)の辞書に対応する基底を持つ。

本稿では、上記の証明は扱わない。

余談

(主)単体法の反復において、同一の基底が複数回出現することを巡回と言う。定理7の証明(i-a)で示したように、主単体法において巡回が起きているときは、退化ピヴォットが連続しており、対応する基底解は変化しない。「巡回」と言う単語から、許容解多面体の端点を「巡る(移動する)」というイメージを持つ読者も居るかもしれないが、それは間違っている。主単体法において巡回が起きているときは、対応する基底解は、許容解多面体のある端点に留まったまま動かない。また、このことから、巡回の様子を許容解多面体の幾何学的形状から伺うことは、困難であると筆者は感じる。

参考文献

- [1] Robert G. Bland, “New finite pivoting rules for the simplex method,” *Mathematics of Operations Research*, 2 (1977), 103-107.