クラス編成問題

松井 知己

あなたの学校では、クラス (あるいは学科や研究室) をどうやって決めているでしょう？クラス編成の問題は、学生からはあまり見えませんが、学校生活では重要な問題です。ここでは次のような状況で、クラス編成を行なうとしましょう。学生の集合を $S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n\}$ とし、クラスの集合を $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ とする。各学生毎に、全クラスを志望順に並べた志望順位表が存在する。学生の番号は、 s_1 が最も成績が良く、 2 番目が s_2、 以下成績の良い順に並んでいるものとする。各クラスには定員が定まっており、 クラス c_j の定員は $u_j \geq 0$ とする。ただし、クラス定員の総和は学生数に等しいとする、 すなわち $u_1 + u_2 + \cdots + u_m = n$ が成り立つ。

さて、上記の成績と志望と定員のデータを用いて、学生をクラスに配属させるというのがクラス編成問題である。以下では、各クラスに配属する学生数は、丁度その定員数である問題について考える。(現実では、定員より多めに取ったり少なめに取ったりすることが良くあるのは、 皆さんもご存知でしょう！？)

さてどんな配属をすれば良いのでしょう？ここで重要なのは「良い」という言葉です。では、どんな配属が「良い」配属なのでしょう？これから考える必要がありそうですね。

ひとつ定義をしましょう。相異なる 2 つの配属 A と A' において、任意の学生について、A で配属されたクラスよりも A' で配属されたクラスの方が同じかより好ましいとき、 A' は A を支配すると言う。すると支配されている配属より、支配している配属の方が「良さそう」ですね。すなわち、「どんな配属にも支配されない、配属」というのが良さそうです。

ある配属 A において、学生 s_i が第 3 志望のクラスに配属されたとしましょう。その学生が「私は何故第 2 志望のクラスに入れないのだろう？」と考えたとき、なんらかの理由がなければ、その学生は納得しないでしょう。例えば、「学生 s_i の第 2 志望のクラスに配属された各学生は、成績がその学生より良かった」という理由もあるでしょう (それで、その学生が納得するかどうかは、分かりませんが) 。

では上記の事をまとめてみましょう。ある配属方法 A が「良い」とは、 A が以下の性質を満たすこととしましょう。

(1) 配属 A は、他のどんな配属にも支配されない。

(2) 配属 A において、ある学生 s_i が第 k 志望のクラスに配属されていたならば、 学生 s_i の第 1 志望から第 $k-1$ 志望のクラスに配属されている学生は、 皆、学生 s_i より成績が良い。

さて、上記の 2 つの条件を満たすような配属はあるのでしょうか？実は、上記のの 2 条件を満たす配属は常に存在し、また唯一つしか存在しません。では、この存在性と唯一性を、 上記の 2 条件を満たす配属を求める方法を作ることで示しましょう。そんなに難しくはありません。

まず成績が 1 番の学生 s_1 は、その志望をだれにも邪魔されません。ゆえに学生 s_1 は行きたいクラスなら (定員が 0 人でない限り) 何処でも入ることができます。すなわち学生 s_1 は第 1 志望のクラスに配属していなければなりません。(ただし、第 1 志望のクラスの定員が 0 人だったときは、 第 2 志望のクラスとなります。 正確には、学生 s_1 は、 定員が 1 名以上のクラスで最も志望順位が高いクラスに 所属することができます。) 学生 s_1 の所属が唯一つしか存在しないのですから、 問題サイズを一つ小さくできます。すなわち、学生 s_1 を除き、 s_1 の所属したクラスの定員を 1 名減らした問題を解けば良いということです。そして成績 2 番目の学生 (サイズの小さな問題では、成績 1 番目の学生となっている) について、先と同じように定員が 1 名以上のクラスで最も志望順位が高いクラスに所属させます。以下この手続きを繰り返せば終りです。

上記の手続きから明らかに、条件 $(1)(2)$ を満たす配属は、常に唯一つ存在します。

さて上記のような配属決定方法は本当に「良い」方法でしょうか？これには、いろいろな意見があると思います。(「あるべき」だと私は思います。 上記の方法が良くないという理由を考え付きますか？ 一つも考えつかない方は、もっと柔軟な思考が必要だと、私は思います) 上記の配属決定方法は、「成績さえよければどんな志望でも大丈夫」という「努力が報われる」方法と見ることができます。その一方、成績最下位の学生の志望はまったく意味を持ちません。成績が悪い時は他の人のおこぼれを貰うしかないのです。全員がどんな努力しても、必ず成績最下位の人は存在するという意味では「努力が報われない」という見方もあります。さらに、成績が良くなるためには「他人を蹴り落す」のが良いという点から見たら、これは「良い」方法でしょうか？

この配属決定方法について議論するとき、本当に議論すべきなのは、条件 $(1)(2)$ なのです。だって条件 $(1)(2)$ を認めるならば、上記の配属方法しかないのですから。もし貴方がこの配属方法に不満を見い出すならば、それは条件 $(1)(2)$ のどこかが不満なのです。

さて、どこが不満ですか？