

# MAX SAT について僕の知っていること

宮本 裕一郎

1997 年 5 月 1 日

## 概要

MAX SAT について私が知っていることをここに記す．主な内容は，Johnson の確率的方法（1/2 近似解法）の紹介，Goemans と Williamson の 3/4 近似解法の紹介，SDP を用いた MAX 3SAT 0.769 近似解法の紹介，同じく SDP を用いた MAX 2SAT 0.878 近似解法の紹介，である．

## 1 MAX SAT とは

連言標準形の論理式を考える．そして，論理式の値が真になるような基本論理式への（真あるいは偽の）割当があるかないかを考える．この問題は SAT（充足性問題）と呼ばれる．次式は論理式を真にはできない SAT の例である．

$$(x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$$

論理式の中で括弧で囲まれているそれぞれの部分をクローズと呼ぶ．括弧内で  $\vee$  で結ばれているそれぞれの要素をリテラルと呼ぶ．

全てのクローズに非負の重みを与え，値が真となるクローズの重みの和を最大化する問題を MAX SAT（充足性最大化問題）と呼ぶ．値が真となるクローズの重みの和の最大値を MAX SAT の最適値と呼び，それを実現するような基本論理式への真偽の割当を MAX SAT の最適解と呼ぶ．次式は MAX SAT の例である．

$$\begin{array}{cccccc} (x_2) & (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) & (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) & (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) & (x_1 \vee \bar{x}_2) & (x_1 \vee x_3) \\ 4 & 1 & 6 & 4 & 3 & 9 \end{array}$$

この場合，最適値は 24，最適解は  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 1)$  である．

MAX SAT は MAX-SNP である．よって問題のサイズが大きい場合，厳密に解くのは難しい（時間がかかる）．このために，さまざまな近似解法が開発されてきた．

## 2 近似解法とは

これから MAX SAT に対する近似解法をいくつか紹介するがそのまえに近似解法の簡単な定義をしておく．MAX SAT の最適値を  $Z_{\text{OPT}}$  とする．最悪でも  $\alpha Z_{\text{OPT}}$  以上の値を出す解法を  $\alpha$  近似解法と呼ぶことにする．例えば最適値が 100 の問題の集合に対して，常に 50 以上の値を出す解法は 1/2（あるいは 0.5）近似解法である．

### 3 MAX SAT 1/2 近似解法の紹介

ここで紹介するのは Johnson の確率的方法である．しかし、私はこれを書くにあたって Johnson の論文 [1] は読んでいない． Yannakakis の論文 [2] を読んで書いた．

変数  $x_j$  が真となる確率を  $p_j$  とする．このとき重み  $w_i$  のクローズ  $C_i$  が真となる確率  $s_i$  は

$$s_i = 1 - \left( \prod_{\bar{x}_j \in C_i} p_j \right) \cdot \left( \prod_{x_j \in C_i} (1 - p_j) \right) \quad (1)$$

となる．さらに重みの和の期待値  $\widehat{W}$  は

$$\widehat{W} = \sum w_i s_i$$

となる．このとき  $p_j$  をもとにして、 $\widehat{W}$  以上の値を実現する真偽の割当を決定する算法がある（ランダムマイゼーション算法と呼ばれる）．それが以下の貪欲算法である．（証明は省略する．）

#### 貪欲算法 (Greedy Algorithm)

入力： 重み付きのクローズ  $C_i$  の集合と変数  $x_j$  が真になる確率  $p_j$ ．（ここで  $C_i$  や  $x_j$  はもともと連言標準形の論理式の構成要素なので、 $C_i$  中に同じリテラルは2回含まれないし、あるリテラルとその否定のリテラルの2つが同時に含まれることはない．）

出力：  $\widehat{W}$  以上の値を実現する基本論理式への真偽の割り当て．

やり方： 初期化： 全てのクローズ  $C_i$  に対して  $C_i$  が偽になる確率  $u_i$

$$u_i = \left( \prod_{\bar{x}_j \in C_i} p_j \right) \cdot \left( \prod_{x_j \in C_i} (1 - p_j) \right)$$

を計算する．

ループ： 値が決まっていない変数  $x_j$  があるならば、リテラル  $x_j$  を含んでいるクローズの集合を  $CP$  とし、リテラル  $\bar{x}_j$  を含んでいるクローズの集合を  $CN$  とする．もし、

$$p_j \sum_{C_i \in CP} w_i u_i \geq (1 - p_j) \sum_{C_i \in CN} w_i u_i$$

ならば  $x_j = \text{真}$  とする．そうでないときは  $x_j = \text{偽}$  とする． $x_j = \text{真}$  としたときは、 $CN$  の全てのクローズ  $C_i$  について  $u_i$  を  $p_j$  で割る．そして  $CP$  の全てのクローズを除去する． $x_j = \text{偽}$  としたときは、 $CP$  の全てのクローズ  $C_i$  について  $u_i$  を  $1 - p_j$  で割る．そして  $CN$  の全てのクローズを除去する．

以下では、この方法をランダムマイズドアルゴリズムのサブルーチンとして用いる．全ての  $p_i$  を  $1/2$  にすれば Johnson の  $1/2$  近似算法が得られる．この算法で得られる解の値を  $\widehat{W}_P$  とすると

$$\widehat{W}_P \geq \widehat{W} \geq \text{全てのクローズの重みの和} \times 1/2$$

である．よって、この方法は MAX SAT の  $1/2$  近似解法になっている．以下は、Johnson の確率的方法の例である．

$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$
$(x_2)$	$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$	$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$	$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$	$(x_1 \vee \bar{x}_2)$	$(x_1 \vee x_3)$
$w_1 = 4$	$w_2 = 1$	$w_3 = 6$	$w_4 = 4$	$w_5 = 3$	$w_6 = 9$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{2} \text{ とすると } s_1 = \frac{1}{2}, s_2 = \frac{7}{8}, s_3 = \frac{7}{8}, s_4 = \frac{7}{8}, s_5 = \frac{3}{4}, s_6 = \frac{3}{4} \\ \widehat{W} &= 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{7}{8} + 6 \cdot \frac{7}{8} + 4 \cdot \frac{7}{8} + 3 \cdot \frac{3}{4} + 9 \cdot \frac{3}{4} = \frac{165}{8} = 20.6 \dots \\ & \Downarrow \end{aligned}$$

$(p_1, p_2, p_3) = (1, 0, 1)$  とすると  $C_1, C_2$  以外は全て真となる。  
よって (Johnson の方法による) 近似値は 22, それを実現する割当は  
 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$   
となる。

#### 4 MAX SAT 3/4 近似解法の紹介

ここでは主に Goemans と Williamson によるシンプルな方法 [3] を説明する。MAX SAT の 3/4 近似解法として Yannakakis によるネットワークフローを用いる方法 [2] も読んだのだがこちらは場合分けが多くて複雑なので省略する。しかし Yannakakis の方法は「へー、こんな方法もあるんだ。」という意味で興味深い。論理式の標準形として、 $\wedge$  と  $\vee$  と否定ではなく、 $\rightarrow$  と否定を用いる方法もあるなど考え直さずにはいられない方法である。

では、Goemans と Williamson によるシンプルな方法について説明する。まず、概要だが以下のようにになっている。

ステップ 1 Johnson の確率的方法 (において全ての  $p_j = 1/2$  とした方法) により得られた値を  $\widehat{W}_P$  とする。

ステップ 2 MAX SAT を以下のような ILP (整数線形計画問題) に変換する。

$$\begin{aligned} \max. & \sum w_i z_i \\ \text{s.t.} & \sum_{x_j \in C_i} x_j + \sum_{\bar{x}_j \in C_i} (1 - x_j) \geq z_i \\ & x_j, z_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

それを LP (線形計画問題) に緩和した問題 (上の ILP の整数制約を不等式制約にしたもの) を解く。LP の最適値を  $Z_{LP}^*$  とする。LP の最適解を元にして貪欲算法を用いて真偽割当を出す。この割当による値を  $\widehat{W}_{LP}$  とする。

ステップ 3 場合 1 全てのクローズが 2 個以上のリテラルを含むときは  $\widehat{W}_P$  を達成する解をそのまま持ってくればそれが 3/4 近似解になっている。

場合 2 全てのクローズが 2 個以下のリテラルを含むときは  $\widehat{W}_{LP}$  を達成する解をそのまま持ってくればそれが 3/4 近似解になっている。

場合 3 どちらでもない場合は、実は

$$\max(\widehat{W}_P, \widehat{W}_{LP}) \geq \frac{\widehat{W}_P + \widehat{W}_{LP}}{2} \geq \frac{3}{4} Z_{LP}^* \geq \frac{3}{4} Z_{OPT}$$

が成り立つので、 $\widehat{W}_P$  と  $\widehat{W}_{LP}$  の大きい方を持ってくれば 3/4 近似解になっている。

この近似解法を実行した数値例を付録 A にあげておく。

以下ではこの近似解法が  $3/4$  近似になっていることの証明をする。場合 1 は明らかなので（なぜならば、すべてのクローズがそれぞれ 2 個以上のリテラルを含むということはすべてのクローズがそれぞれ偽になる確率は  $(1/2)^2$  以下である。よってすべてのクローズがそれぞれ真になる確率は  $3/4$  以上となり、 $\widehat{W}_P = 1/4 \geq 3/4 \times (\text{重みの和})$  である。）、場合 2 と場合 3 の証明をする。

#### 4.1 場合 2 の証明

全てのクローズが高々  $k$  個のリテラルを含む MAX SAT を MAX  $k$ SAT と呼ぶ。ここでは、 $\widehat{W}_{LP}$  が MAX  $k$ SAT の  $1 - (1 - 1/k)^k$  近似になっていることの証明をする。 $k = 2$  の時が場合 2 に対応する。

補題 1 LP に緩和した問題はそその実行可能解  $(x, z)$  に対し（制約条件式のそれぞれについて）

$$1 - \prod_{x_j \in C_i} (1 - x_j) \prod_{\bar{x}_j \in C_i} x_j \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) z_i$$

が常に成り立っている。

（証明）クローズ  $C_i$  は否定を使ったリテラルを含まないとして一般性を失わない。さらに  $C_i = (x_1 \vee \dots \vee x_k)$  として一般性を失わない。（リテラルが  $k$  個より少ない場合はリテラルがちょうど  $k$  個になるように人工的なリテラルを追加すれば良い。）このとき LP の制約条件式は  $x_1 + \dots + x_k \geq z_i$  となる。これを用いて

$$1 - \prod_{j=1}^k (1 - x_j) \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) z_i$$

を証明すればよい。相加相乗平均より

$$1 - \prod_{j=1}^k (1 - x_j) \geq 1 - \left(\frac{k - \sum_{j=1}^k x_j}{k}\right)^k \geq 1 - \left(1 - \frac{z_i}{k}\right)^k$$

である。ここで  $1 - (1 - z_i/k)^k$  は  $z_i$  に関する凹関数なので

$$1 - \left(1 - \frac{z_i}{k}\right)^k \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) z_i \quad (0 \leq z_i \leq 1)$$

である。 □

よって、LP の最適解を  $x_j^*, z_i^*$  で最適値を  $Z_{LP}^*$  で表すと、リテラル  $x_j$  を  $x_j^*$  の確率で真としたときの期待値は

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{全てのクローズ}} w_i \left\{ 1 - \prod_{x_j \in C_i} (1 - x_j^*) \prod_{\bar{x}_j \in C_i} x_j^* \right\} \\ & \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) \sum_{\text{全てのクローズ}} w_i z_i^* \\ & = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) Z_{LP}^* \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) Z_{OPT} \end{aligned} \quad (2)$$

となる。よって先の貪欲算法を用いれば、上記の期待値以上の値を達成する真偽の割当を見つげることができ、この解は  $1 - (1 - 1/k)^k$  近似解となる。一般の MAX SAT は MAX  $k$ SAT の  $k \rightarrow \infty$  の場合であると考えられ、そのとき上の解は  $(1 - 1/e)$  近似解となる。

## 4.2 場合 3 の証明

ここでは

$$\max(\widehat{W}_P, \widehat{W}_{LP}) \geq \frac{\widehat{W}_P + \widehat{W}_{LP}}{2} \geq \frac{3}{4} Z_{LP}^*$$

を証明する．左側の  $\geq$  は明らかなので，右側の  $\geq$  を証明する．

MAX SAT において  $k$  個のリテラルよりなるクローズの集合を  $C^k$  で表す．式 (1) において全ての  $p_j$  を  $1/2$  にすると容易に以下の式が得られる．

$$\widehat{W}_P = \sum_{k \geq 1} \sum_{C_i \in C^k} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) w_i \geq \sum_{k \geq 1} \sum_{C_i \in C^k} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) w_i z_i^*$$

一方，式 (2) より

$$\widehat{W}_{LP} \geq \sum_{k \geq 1} \sum_{C_i \in C^k} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) w_i z_i^*$$

よって，

$$\frac{\widehat{W}_P + \widehat{W}_{LP}}{2} \geq \sum_{k \geq 1} \sum_{C_i \in C^k} \frac{\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) + \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right)}{2} w_i z_i^*$$

ここで， $k = 1$  のとき及び  $k = 2$  のとき

$$\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) + \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) = \frac{3}{2}$$

$k \geq 3$  のときは

$$\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) + \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) \geq \frac{3}{2}$$

よって

$$\frac{\widehat{W}_P + \widehat{W}_{LP}}{2} \geq \frac{3}{4} Z_{LP}^*$$

## 5 MAX 3SAT 0.769 近似解法の紹介

ここでは MAX 3SAT に対する 0.769 近似解法の紹介をする．これは参考文献 [4] によるものである．大まかな流れは

1. MAX 3SAT を ILP に変換する．
2. それを SDP に緩和し，緩和問題を解く．
3. 緩和問題の解を元にして真偽割当を決める．

となっている．以下詳しく述べる．

### 5.1 MAX 3SAT を ILP に変換する

$$C_i(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{x_j \in C_i} (1 - x_j) \prod_{\bar{x}_j \in C_i} x_j$$

とすると MAX SAT は

$$\begin{aligned} \max. \quad & \sum w_i C_i(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & x_j \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (\text{ILP1})$$

と書ける .

$$C_i(\mathbf{x}) \leq \sum_{x_j \in C_i} x_j + \sum_{\bar{x}_j \in C_i} (1 - x_j)$$

なので ILP1 と以下の ILP2 は同じである .

$$\begin{aligned} \max. \quad & \sum w_i z_i \\ \text{s.t.} \quad & z_i \leq C_i(\mathbf{x}) \\ & z_i \leq \sum_{x_j \in C_i} x_j + \sum_{\bar{x}_j \in C_i} (1 - x_j) \\ & 0 \leq z_i \leq 1 \\ & x_j \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (\text{ILP2})$$

次に  $x_j = \frac{1+y_0 y_j}{2}$  という変数変換を行なう . すると ILP2 と以下の ILP3 は同じである .

$$\begin{aligned} \max. \quad & \sum w_i z_i \\ \text{s.t.} \quad & z_i \leq C'_i(\mathbf{x}) \\ & z_i \leq \sum_{x_j \in C_i} \frac{1+y_0 y_j}{2} + \sum_{\bar{x}_j \in C_i} \frac{1-y_0 y_j}{2} \\ & 0 \leq z_i \leq 1 \\ & y_j \in \{-1, 1\} \end{aligned} \quad (\text{ILP3})$$

ここで  $C'_i(\mathbf{y}) = C_i(\frac{1+y_0 y_1}{2}, \frac{1+y_0 y_2}{2}, \dots, \frac{1+y_0 y_n}{2})$  である . 今 ,  $C_i$  に 3 つのリテラル  $(x_p, x_q, x_r)$  が含まれる場合を考える . このとき

$$C'_i(\mathbf{y}) = \frac{1}{8} \{ (1 + y_0 y_p) + (1 + y_0 y_q) + (1 + y_0 y_r) + (1 - y_p y_q) + (1 - y_q y_r) + (1 - y_r y_p) + (1 + y_p y_q y_r) \}$$

である . もし否定のリテラルが含まれるならば  $y$  の代わりに  $-y$  を入れればよい .  $C'_i(\mathbf{y})$  の最初の 6 つの項を  $c_i(\mathbf{y})$  , 残りの 1 つを  $d_i(\mathbf{y})$  とする . すなわち  $C'_i(\mathbf{y}) = c_i(\mathbf{y}) + d_i(\mathbf{y})$  である .  $c_i(\mathbf{y})$  は 2 次式である .  $C'_i(\mathbf{y})$  の範囲に関して以下の補題が成り立つ .

補題 2 リテラルを 3 つ含むクローズの全てについて ,

$$c_j(\mathbf{y}) \leq C'_j(\mathbf{y}) \leq \frac{4}{3} c_j(\mathbf{y})$$

が成り立つ .

(証明)  $d_i(\mathbf{y}) \geq 0$  なので左の不等式は明らかである .

右側の不等式については以下のように考える .  $d_i(\mathbf{y}) = 0$  の場合は  $C'_i(\mathbf{y}) = c_i(\mathbf{y}) \geq 0$  なので明らかに  $\frac{4}{3} c_i(\mathbf{y}) \geq C'_i(\mathbf{y})$  .  $d_i(\mathbf{y}) \neq 0$  の場合は  $d_i(\mathbf{y}) = \frac{1}{4}$  で  $C'_i(\mathbf{y}) > 0$  であり ,  $C'_i(\mathbf{y}) \in \{0, 1\}$  なので  $C'_i(\mathbf{y}) = 1$  となり ,  $c_i(\mathbf{y}) = \frac{4}{3}$  . よって  $C'_i(\mathbf{y}) \leq \frac{4}{3} c_i(\mathbf{y})$  .  $\square$

リテラルが 2 個以下のクローズについては  $c_i(\mathbf{y}) = C'_i(\mathbf{y})$  とする (これでも  $c_i(\mathbf{y})$  が 2 次式であることは守られる) . これらを用いて MAX 3SAT は以下のように定式化できる .

$$\begin{aligned} \max. \quad & \sum w_i z_i \\ \text{s.t.} \quad & z_i \leq c_i(\mathbf{y}) \quad (\text{リテラルが 2 個以下の場合}) \\ & z_i \leq \frac{4}{3} c_i(\mathbf{y}) \quad (\text{リテラルが 3 個の場合}) \\ & z_i \leq \sum_{x_j \in C_i} \frac{1+y_0 y_j}{2} + \sum_{\bar{x}_j \in C_i} \frac{1-y_0 y_j}{2} \\ & 0 \leq z_i \leq 1 \\ & y_j \in \{-1, 1\} \end{aligned} \quad (\text{ILP4})$$



補題 4 補題 3 の  $\alpha$  に対して

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{1 - y_i y_j}{2} \right] &\geq \alpha \frac{1 - y_{ij}^*}{2} \\ E \left[ \frac{1 + y_i y_j}{2} \right] &\geq \alpha \frac{1 + y_{ij}^*}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ .

(証明) 対称性より, 上の式だけ示せば十分である .

$\frac{1 - y_i y_j}{2}$  は  $\theta$  か  $1$  なので

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{1 - y_i y_j}{2} \right] &= Pr\{y_i \neq y_j\} \\ &= Pr\{\text{sign}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_i^*) \neq \text{sign}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_j^*)\} \\ &= 2Pr\{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_i^* > 0 \text{ かつ } \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_j^* < 0\} \quad (\text{対称性より}) \end{aligned}$$

$\mathbf{v}_i^*$  と  $\mathbf{v}_j^*$  の間の角度を  $\theta_{ij}$  とする . 集合  $\{\mathbf{r} : \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_i^* > 0 \text{ かつ } \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_j^* < 0\}$  は幅  $\theta_{ij}$  度の何ともいえない形になる . その面積は  $\frac{\theta_{ij}}{2\pi}$  である . このために

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{1 - y_i y_j}{2} \right] &= 2Pr\{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_i^* > 0 \text{ かつ } \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_j^* < 0\} \\ &= \frac{2\theta_{ij}}{2\pi} = \frac{\theta_{ij}}{\pi} \end{aligned}$$

であり,  $\alpha$  の定義より, 任意の  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) に対して  $\frac{\theta}{\pi} \geq \alpha \frac{1 - \cos \theta}{2}$  である . よって

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{1 - y_i y_j}{2} \right] &= \frac{\theta_{ij}}{\pi} \\ &\geq \alpha \frac{1 - \cos \theta_{ij}}{2} \\ &= \alpha \frac{1 - y_{ij}^*}{2} \end{aligned}$$

である . □

(補題 3 の証明) 補題 4 より  $E[c_i(\mathbf{y})] \geq \alpha c_i(Y^*)$  . よって, 2 個以下のリテラルを含むクローズについては

$$E[C_i(\mathbf{x})] = E[c_i(\mathbf{y})] \geq \alpha c_i(Y^*) \geq \alpha z_i^*$$

が成り立ち, 3 個のリテラルを含むクローズについては

$$E[C_i(\mathbf{x})] \geq E[c_i(\mathbf{y})] \geq \alpha c_i(Y^*) \geq \frac{3}{4} \alpha z_i^*$$

が成り立つ . これらをまとめると

$$\begin{aligned} \sum w_i C_i(\mathbf{x}^S) &\geq E \left[ \sum w_i C_i(\mathbf{x}) \right] \\ &= \sum w_i E[C_i(\mathbf{x})] \\ &= \sum_{|C_i| \leq 2} w_i E[C_i(\mathbf{x})] + \sum_{|C_i| = 3} w_i E[C_i(\mathbf{x})] \\ &\geq \sum_{|C_i| \leq 2} w_i \alpha z_i^* + \sum_{|C_i| = 3} w_i \cdot \frac{3}{4} \alpha z_i^* \\ &= \alpha \sum_{|C_i| \leq 2} w_i z_i^* + \frac{3}{4} \alpha \sum_{|C_i| = 3} w_i z_i^* \end{aligned}$$



がわかる .

□

## 5.4 MAX 3SAT に対する 0.769 近似解法

ここでは、さまざまな方法で得られた割当をそれぞれある確率で用いることによって近似率を高める算法を紹介する。それが MAX 3SAT に対する 0.769 近似解法である。割当としては  $x^S$  以外に Johnson の方法により得られる割当  $x^J$  と LP 緩和により得られる割当  $x^L$  を用意する。 $x^J, x^L, x^S$  をそれぞれ確率  $p_J, p_L, p_S$  で用いるとする ( $p_J + p_L + p_S = 1$ )。このとき以下の定理が成り立つ。

定理 1 近似率が 0.769 となるような、うまい  $p_J, p_L, p_S$  の組が存在する。

(証明)  $x^J, x^L, x^S$  を組み合わせて使う算法の近似率を  $a$  とする。リテラルを 1 つ含むクローズ, 2 つ含むクローズ, 3 つ含むクローズに対してそれぞれ以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}p_J + p_L + \alpha p_S &\geq a \\ \frac{3}{4}p_J + \frac{3}{4}p_L + \alpha p_S &\geq a \\ \frac{7}{8}p_J + \frac{19}{27}p_L + \frac{3}{4}\alpha p_S &\geq a\end{aligned}$$

この 3 本の式を LP の制約条件として  $a$  を最大化する問題を解くと、 $a = 0.7694\dots$  となる最適解が存在する。□

## 6 MAX 2SAT 0.878 近似解法の紹介

MAX 2SAT は MAX 3SAT の特別な場合 (すなわちリテラルを 3 つ含むクローズがたまたまない場合) と考えられる。これを前節に当てはめて考えると MAX 2SAT 近似解法となる。

MAX 3SAT から MAX 2SAT に変わると何がかわるか。まず (ILP4) の 2 つ目の制約式がいない。よって (SDP1) の 2 つ目の制約式もない。よって補題 3 の右辺の第 2 項がいない。この時点で近似率は 0.878 である。(ちなみに定理 1 の LP を解いてもやっぱり近似率は 0.878 である。) おわり。

### 参考文献

- [1] D.S.Johnson, "Approximation Algorithms for Combinatorial Problems", J.Comp.Sys.Sc. 9, 256 - 278, (1974)
- [2] M.Yannakakis, "On the Approximation of Maximum Satisfiability", Journal of Algorithms 17, 475 - 502, (1994)
- [3] M.X.Goemans And D.P.Williamson, "NEW  $\frac{3}{4}$ -APPROXIMATION ALGORITHMS FOR MAX SAT", SIAM J. DISC. MATH. Vol.7, No.4, 656 - 666, (1994)
- [4] T.Ono, T.Hirata And T.Asano, "An Approximation Algorithm for MAX 3SAT", Transactions of Information Processing Society of Japan Vol.37, No.10, 1760 - 1764, (1996)

## A $\frac{3}{4}$ 近似解法の例

以下は近似解法の実際の問題への適用例である .

$$\begin{array}{cccccc}
 C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \\
 (x_2) & (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) & (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) & (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) & (x_1 \vee \bar{x}_2) & (x_1 \vee x_3) \\
 w_1 = 4 & w_2 = 1 & w_3 = 6 & w_4 = 4 & w_5 = 3 & w_6 = 9
 \end{array}$$

|| Johnson の確率的方法

∇  $\widehat{W}_P = 22$  このとき  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$

|| ILP に変換

$$\begin{array}{l}
 \max . 4z_1 + z_2 + 6z_3 + 4z_4 + 3z_5 + 9z_6 \\
 \text{s.t.} \\
 \begin{array}{rcl}
 & x_2 & \geq z_1 \\
 (1 - x_1) + & x_2 + (1 - x_3) & \geq z_2 \\
 (1 - x_1) + (1 - x_2) + & (1 - x_3) & \geq z_3 \\
 (1 - x_1) + (1 - x_2) + & x_3 & \geq z_4 \\
 & x_1 + (1 - x_2) & \geq z_5 \\
 & x_1 + & x_3 & \geq z_6
 \end{array} \\
 x_1, \dots, x_3, z_1, \dots, z_6 \in \{0, 1\}
 \end{array}$$

|| LP に緩和

$$\begin{array}{l}
 \max . 4z_1 + z_2 + 6z_3 + 4z_4 + 3z_5 + 9z_6 \\
 \text{s.t.} \\
 \begin{array}{rcl}
 & x_2 & \geq z_1 \\
 (1 - x_1) + & x_2 + (1 - x_3) & \geq z_2 \\
 (1 - x_1) + (1 - x_2) + & (1 - x_3) & \geq z_3 \\
 (1 - x_1) + (1 - x_2) + & x_3 & \geq z_4 \\
 & x_1 + (1 - x_2) & \geq z_5 \\
 & x_1 + & x_3 & \geq z_6
 \end{array} \\
 0 \leq x_1, \dots, x_3, z_1, \dots, z_6 \leq 1
 \end{array}$$

|| LP を解く

∇  $z_{LP}^* = 26$  このとき  $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2})$   
重みの期待値は 21.4...

|| 貪欲算法により変換

∇  $\widehat{W}_{LP} = 23$  このとき  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$

∇

∇

より良い方を採用すると, 近似値は 23, 割当は  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$

ちなみに最適値は 24, その時の割当は  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 1)$