

解けないパズルをLPで解く

— ペグソリティアとパゴダ関数と線形計画 —

松井 知己

1 ペグソリティア

ペグソリティアというパズルを御存知だろうか？図1のような穴の開いた盤にペグを刺して遊ぶパズルである。図1中の黒丸(白丸)は、ペグが刺さっている(いない)ことを表している。通常用いられる図1のような盤は English board と呼ばれる。

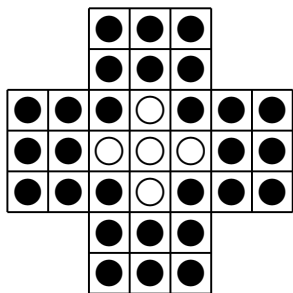


図1 English board の初期配置例。図中の () はペグの刺さっている穴(いない穴)を表す。

図2(a)のように連続する3つの穴の1つ目と2つ目にペグが有り、3つ目の穴にペグが無いとき、図2(b)のように飛び越えて中央のペグを除き、図2(c)のように1つのペグを残すことができる。この操作をジャンプと呼ぶ。ジャンプを実行できる3つの穴の並びは、縦の上から下、縦の下から上、横の右から左、横の左から右の4通りがある。ペグソリティアは、与えられた初期配置から、ジャンプを繰り返し行って、(与えられた)最終配置に到達する手順を探すパズルである。

あるペグ配置に対し、ペグが刺さっていない所にペグを刺し、ペグが刺さっている所にはペグを刺さない配置を、補配置と呼ぶ。例えば図1の補配置は、中央の5箇所のみにペグが刺さっている配置となる。では次のような問題を考えよう。

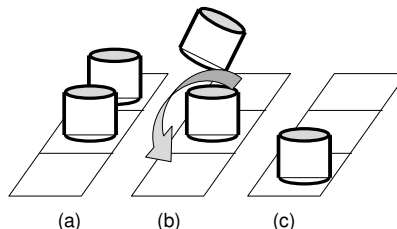


図2 ジャンプの例

問題1: 図1を初期配置として、ジャンプを繰り返し行って、図1の補配置に到達することができるか？

2 解けないパズル

実は問題1の答えは『不可能』である。Berlekamp, Conway and Guy は本 [2] において、次のような巧妙な方法でこの問題が解けないことを示している。ゲーム盤の各マス(穴)に図3のような数字を割り当てよう。

		-1	0	-1		
		1	1	1		
-1	1	0	1	0	1	-1
0	1	1	2	1	1	0
-1	1	0	1	0	1	-1
		1	1	1		
		-1	0	-1		

図3 パゴダ関数の例

任意のペグ配置 p に対し、ペグが刺さっているマス目の図3での値を合計したものを $\text{pag}(p)$ と書くことにしよう。例えば図1の配置を p^s と書くと $\text{pag}(p^s) = 4$ である。また図1の補配置を p^f と書くと $\text{pag}(p^f) = 6$ となる。実は図3の値は非常に巧妙に割り当てられており、どの連続する3つのマス目についても、対応する数字を (a, b, c) と書くと、 $a + b \geq c$ が成り立っている。連続する3つのマス目の方向は4つあることに注意されたい(ゆえに $a \leq b + c$ も同時に成り立っている)。これより、ある配置 p^1 から1回のジャンプ操作で配置 p^2 が得られたとき、ペグの取り除かれた2箇所の値の和より、ペグの刺し込まれた場所の値の方が同じか小さい。したがって必ず $\text{pag}(p^1) \geq \text{pag}(p^2)$ が成

まつい ともみ
中央大学 理工学部
〒112-8551 文京区春日 1-13-27

り立つ。すなわち、ジャンプ操作によって、配置に対する値 $\text{pag}(\cdot)$ は単調非増加となっている。¹ ゆえに、ある配置 p^1 から (何回かの) ジャンプ操作で配置 p^3 が得られたとき、必ず $\text{pag}(p^1) \geq \text{pag}(p^3)$ が成り立つ。ところが上記の問題では、初期配置 p^S と最終配置 p^f は $4 = \text{pag}(p^S) < \text{pag}(p^f) = 6$ を満たしており、このことから初期配置からジャンプ操作で最終配置に到ることは不可能であることが分る。Berlekamp, Conway and Guy は図 3 の値を、各マス目を実数に対応させる関数と見なし、パゴダ関数と呼んでいる。この「パゴダ関数」はどこから来たのだろうか？² 実は元の問題の線形計画緩和問題を作成してその双対をとると、極めて自然な形でパゴダ関数が導出される。次節でこれを説明しよう。

3 パゴダ関数と双対問題

English board には全部で 33 箇所のマス目 (穴) がある。これらに適当な順番で 1 から 33 までの番号をつけて区別しよう。各ペグ配置に対し、ペグの刺さっている所は 1、刺さっていないところは 0 とした 33 次元の 0-1 ベクトルに対応させる。すなわち、任意のペグ配置は 33 次元の 0-1 ベクトルとして表すことができる。

ペグ配置 $p \in \{0, 1\}^{33}$ から 1 回のジャンプ操作で $p' \in \{0, 1\}^{33}$ が得られたとしよう。すると、 p の 2 つの要素を 1 から 0 に変え、1 つの要素を 0 から 1 に変えたものが p' になっている。対応するジャンプにおいて、ペグを取り除くマス目の番号を s, t とし、ペグを刺し込むマス目の番号を r と書く。ここで 33 次元ベクトル a を、第 s, t 要素が 1、第 r 要素が -1 、残りは 0 となるベクトルとすると、 $p' = p - a$ が成り立っている。ベクトル a をジャンプベクトルと呼ぶことにする。

English board には、可能なジャンプは全部で 76 種類ある (ジャンプの方向は 4 種類あり、各方向毎に 19 種類のジャンプがある)。これら 76 種類のジャンプに 1 から 76 までの通し番号をつけ、対応するジャンプベクトルを並べた行列をジャンプ行列と呼ぶ。すなわちジャンプ行列 $A = (a_{ij})$ は 33×76 の行列で

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{ジャンプ } j \text{ はマス目 } i \text{ のペグを取り除く}), \\ -1 & (\text{ジャンプ } j \text{ はマス目 } i \text{ にペグを刺し込む}), \\ 0 & (\text{それ以外}), \end{cases}$$

と定義される。

初期配置 p^S と最終配置 p^f が与えられたとき、 p^S から p^f へジャンプ操作の繰り返しで到達できるとしよう。このジャンプ操作において、ジャンプ j を行う回数を x'_j とし、これをならべた 76 次元の非負整数ベクトルを x'

とする。このとき等式 $p^f = p^S - Ax'$ が成り立つ筈である。ゆえに、初期配置 p^S と最終配置 p^f が与えられたとき、線形不等式系

$$Ax = p^S - p^f, \quad x \geq 0 \quad (1)$$

が解 x を持たなければ、初期配置から最終配置までジャンプ操作で到達することは不可能であることが分る。ちなみにこの逆は成り立たない。すなわち、(1) が解を持っていても、初期配置から最終配置までジャンプ操作で到達できるとは限らない。これは、ベクトル x の整数性を無視していることや、ジャンプの順番という概念が (1) では無視されているためである。

線形不等式系 (1) が解を持たなければ、与えられたペグソリティア問題が解けないことが分るが (逆は成り立たない)、『解を持たない』ことを確認するには何を示せば良いのだろうか？『何かが無いこと』を示すのは一般には容易では無い。線形計画の双対の概念は、これを可能にするのである。³ (線形計画に興味の無い方は、式 (2) の‘直前’までスキップしてください。)

線形不等式系 (1) を制約に持ち、人工的な (無意味な) 目的関数 $0^\top x$ を最大化する線形計画問題

$$P1: \max\{0^\top x \mid Ax = p^S - p^f, \quad x \geq 0\}$$

を導入しよう。⁴ この双対問題は

$$D1: \min\{y^\top (p^S - p^f) \mid y^\top A \geq 0\}$$

となる。主問題 P1 が許容解を持たないとき、線形計画の基本定理より双対問題 D1 は許容解を持たないか非有界であることが知られている。しかし双対問題 D1 は $y = 0$ という許容解を持っている。ゆえに、主問題 P1 が実行不能ならば双対問題 D1 は非有界となる (すなわち、いくらでも目的関数値を小さくできる)。また、双対問題 D1 が目的関数値が負となる許容解 y' を持つならば、主問題 P1 は実行不能であることが以下のように簡単に導かれる。

問題 D1 は目的関数値が負となる許容解 y' を持ち、問題 P1 が許容解 x' を持つと仮定すると、 $0 = 0^\top x' \leq y'^\top Ax' = y'^\top (p^S - p^f) < 0$ となり矛盾。

上記より、線形不等式系 (1) が解を持たない必要十分条件は、線形不等式系

$$y^\top (p^S - p^f) < 0, \quad y^\top A \geq 0 \quad (2)$$

³ ここが、筆者が本稿で最も書きたかった文章だ。ちなみに最適性と双対が密接に関わるのも同じ理由である。すなわち、最適性とは『それより良い解が無いこと』であり、やはり『何かが無いこと』に関係する性質となっている。

⁴ 目的関数に意味は無いので、最大化でも最小化でも良いのだが、最大化にすると、双対問題 D1 とパゴダ関数との相性が良い。

¹ 配置に対するポテンシャルの類と考えることができる。

² 名前の由来は [2] を参照のこと。

が解を持つこととなる⁵

実は線形不等式系 (2) の解こそが前節のパゴダ関数に他ならない。変数ベクトル y は English board のマス目に対応した 33 次元ベクトルになっている。制約 $y^T A \geq 0$ 中の各不等式は、ジャンプに関する性質に対応している。例えばジャンプ j を、マス目 s, t からペグを取り除き、マス目 r にペグを刺し込むジャンプとしよう。ジャンプ j に対応するジャンプベクトルは、ジャンプ行列 A の第 j 列であり、これに対応する (2) 中の不等式は $y_s + y_t - y_r \geq 0$ となっている。任意のペグ配置 $p \in \{0, 1\}^{33}$ に対し、 $\text{pag}(p) = y^T p$ と定義しよう。すると不等式系 $y^T A \geq 0$ は、前節で記述したパゴダ関数が満たす性質、『任意のジャンプ操作に対し、配置に対する値 $\text{pag}(\cdot)$ は単調非増加となっている』を表していることが分るだろう。また不等式 $y^T (p^s - p^f) < 0$ は、 $\text{pag}(p^s) < \text{pag}(p^f)$ に他ならない。

以上より、次の 3 つは同値であることが分る⁶

1. 配置 p^s から配置 p^f へジャンプ操作の繰り返しで到達出来ないことを示すパゴダ関数が存在する。
2. 線形不等式系 (2) が解を持つ。
3. 線形不等式系 (1) が解を持たない。

実際にパゴダ関数を (存在するならば) 求めるには問題 D1 を解けば良いが、問題 D1 は最適値が 0 か、非有界のどちらかなので、例えば $\text{pag}(p^s)$ を 1 に固定した問題

$$D1': \min\{y^T (p^s - p^f) \mid y^T A \geq 0, y^T p^s = 1\}$$

を線形計画問題のソフトウェアで解く。問題 D1' の最適値が負ならば、与えられたペグソリティア問題は解が無いことが分る (くだいようだが逆は成り立たない)。問題 D1' を用いて「非有界という特殊状況での終了」を避けたことにより、最適値が負ならば最適解として (2) を満たす解、すなわちパゴダ関数を得ることができる。

4 応用編

著名なパズルデザイナー 芦ヶ原伸之の著書 [9] で出題されているパズル『(第 31 棟) 分裂物語』に挑戦してみよう⁷。このパズルでは図 4 のような右と下に無限に広がったマス目の盤を使う。初めに駒を左上隅に 1 つ置く。この初期配置から次の規則で駒を移動させる。『あ

る駒の右隣と真下のマス目が両方空いているとき、もとの駒を取り除いて、右隣と真下の 2 箇所に 1 つずつ駒を置くことができる。』この操作も、ペグソリティアに合わせてジャンプと呼ぶことにする。

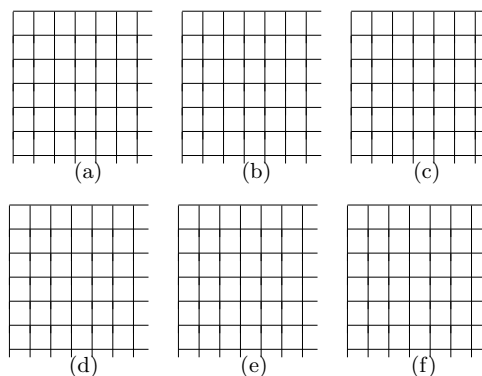


図 4 新しいパズル

問題 2 : 図 4(a) を初期配置として、ジャンプを繰り返し (有限回) 行って、左上隅の 6 マス (図 4(f) で書かれている所) から駒を無くすことができるか?

驚くべきことに、右と下に無限に広がった盤を使用しても上記の問題の答えは『不可能』なのである。しかしながら [9] では単に『不可能だった』と書かれており詳細はまったく記載されていない。不可能性の証明としては、川連信 [7] による証明があり、瀬山士郎の Mathematics Fiction [8] でも読むことができる。以下では計算機を道具に使うこのパズルに挑戦し、[7, 8] とは異なる新しい証明が得られるまでを紹介しよう。

無限に広がる盤を相手にするのは困難なので、まずは 6×6 の小さな盤で考える (6×6 の盤での知見を、後に無限の盤へ拡張する)。盤から駒が出てしまうようなジャンプは許さないとする。36 個のマス目に 1~36 の番号をふる。盤上の駒の配置は、駒があるところを 1、無いところを 0 とした 36 次元の 0-1 ベクトルで表すことができる。初期配置は、左上隅のマス目に対応する要素のみが 1 で、他の要素はすべて 0 の 36 次元ベクトルである。これを p^s と書く。盤から駒の落ちないようなジャンプは $5 \times 5 = 25$ 種類あるので、これにも 1~25 の番号をつける。ジャンプ行列 $B = (b_{ij})$ を、 36×25 の行列とし、

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{ジャンプ } j \text{ はマス目 } i \text{ の駒を取り除く}), \\ -1 & (\text{ジャンプ } j \text{ はマス目 } i \text{ に駒を置く}), \\ 0 & (\text{それ以外}), \end{cases}$$

と定義する。ここで、左上隅の 6 マスに対応する要素がすべて 0 で、残りの 30 個のマスに対応する要素がすべて 1 の 36 次元ベクトルを p^f と書くことにする (前節と

⁵ この性質自体は Farkas の補題から直接導くこともできるし、実はその方が自然でもある。

⁶ この同値性自体は [1] の 5 章において触れられており (線形計画の性質を用いない) 証明の概略が書かれている。またこの性質の初出は Boardman (1961) と書かれているが、残念ながら文献の記載が無いので詳細は不明である。

⁷ 初出は『パズル通信ニコリ』(47号, 1994年2月10日, ニコリ発行, p. 98) 誌上。

は異なり最終配置ではないことに注意せよ。この問題で最終配置は与えられていない。) 仮に 6×6 の大きさの盤に解があると、その解でジャンプ j を実行する回数を x_j とし、これを並べた 25 次元ベクトルを x とすると、

$$p^f \geq p^s - Bx, \quad x \geq 0 \quad (3)$$

という線形不等式系が成り立つ。⁸ 不等式系 $p^f \geq p^s - Bx$ は、ジャンプをすべて行った後の配置で、左上隅の 6 マスには駒が無く、他の 30 個の各マス目には高々一つの駒しかないことから得られる。もし線形不等式系 (3) を満たす解 x が存在しないならば、 6×6 の大きさの盤の問題には解が無いことが分る。

人工的な主問題と、その双対問題をつくると、

$$P2: \min\{0^\top x \mid Bx \geq p^s - p^f, \quad x \geq 0\}$$

$$D2: \max\{y^\top(p^s - p^f) \mid y^\top B \leq 0, \quad y \geq 0\}$$

が得られる。⁹ 線形計画の基本定理と D2 が許容解を持つことから、不等式系 (3) が解を持たないことと、

$$y^\top(p^s - p^f) > 0, \quad y^\top B \leq 0, \quad y \geq 0 \quad (4)$$

が解を持つことは必要十分条件となっている (証明は前節同様であるため省略)。

線形不等式系 (4) を満たす y' があれば、この問題のパゴダ関数 (のようなもの) となっていることを解説しよう。まず y' は各要素が各マス目に対応した 36 次元ベクトルである。あるジャンプ j を、 s のマス目から駒を取り除き、マス目 t, r に駒を置く操作としよう。すると、ジャンプ行列 B の第 j 列ベクトルから作られる $y^\top B \leq 0$ 中の不等式は $y'_s - y'_t - y'_r \leq 0$ 、すなわち $y'_s \leq y'_t + y'_r$ であり、何かが増加することを意味しているようだ。任意の駒配置 $p \in \{0, 1\}^{36}$ に対し、 $\text{pag}^*(p) = y'^\top p$ と定義すれば、不等式系 $y'^\top B \leq 0$ は、『任意のジャンプ操作に対し、配置に対する値 $\text{pag}^*(\cdot)$ は単調非減少である』という性質を意味していることが分る。¹⁰ ここで $y'^\top(p^s - p^f) > 0$ と y' の非負性も成り立つならば、 6×6 の大きさの盤は解が無いことが分る。¹¹

では実際に問題 D2 を計算機で解いてみよう。ただし、非有界となることを避けるために、 $\text{pag}^*(p^s) = 1$ という制約を加えた

$$D2': \max\{y'^\top(p^s - p^f) \mid y'^\top B \leq 0, \quad y' \geq 0, \quad y'^\top p^s = 1\}$$

⁸ 線形不等式系 (1) と異なり、(3) には等式が無いことに注意。

⁹ ベグソリティアと異なり、主問題は (無意味な) 目的関数を最小化している。この理由は次の脚注を参照。

¹⁰ ベグソリティアのパゴダ関数は単調非増加であるのと逆になっている。このパズルでは駒が増えるので、 $\text{pag}^*(\cdot)$ も増えた方が自然だろうと思い、この形式にした。

¹¹ 易しい練習問題なので省略する。ベクトル p^f は最終配置でないため、 y' の非負性が必要不可欠であることに注意されたい。

を解く。最適値は $5/27$ であり、(4) を満たす解が最適解として得られた。最適解 y' は図 5 のようになり、¹² $1 = \text{pag}^*(p^s) > \text{pag}^*(p^f) = 22/27$ が成り立つため、大きさが 6×6 の盤は解を持たないことが確認できる。

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{3})$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{3})$	$\frac{1}{6}(\frac{1}{3})$	0	0
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3})^2$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^2$	$\frac{1}{6}(\frac{1}{3})^2$	0
0	$\frac{1}{6}(\frac{1}{3})$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^2$	$(\frac{1}{3})^3$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^3$	$\frac{1}{6}(\frac{1}{3})^3$ *
0	0	$\frac{1}{6}(\frac{1}{3})^2$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^3$	0	0
0	0	0	$\frac{1}{6}(\frac{1}{3})^2$ *	0	0

図 5 6×6 盤のパゴダ関数。*印のマス目 2 つは $\frac{1}{6}(\frac{1}{3})^3$ ではなくて $\frac{1}{6}(\frac{1}{3})^2$ となっていることに注意。

最後に図 5 をよーく眺めて構造を見つけてみよう。すると、右と下に無限に広がった盤に使えるようなパゴダ関数として図 6 のように、公比 $(1/3)$ の等比数列 5 本からなるものがありそうだ。この盤上に、有限個の駒を置いた配置 p に対し、駒の置かれた場所の値の総和を $\text{pag}^*(p)$ と書くことにする。このとき、『任意のジャンプ操作に対し、配置に対する値 $\text{pag}^*(\cdot)$ は単調非減少である』という性質を満たすことが簡単に確認できる。

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$				
$\frac{1}{2}$	\ddots	\ddots	\ddots			0
$\frac{1}{6}$	\ddots	$(\frac{1}{3})^k$	$\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^k$	$\frac{1}{6}(\frac{1}{3})^k$		
	\ddots	$\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^k$	\ddots	\ddots	\ddots	
		$\frac{1}{6}(\frac{1}{3})^k$	\ddots			
0			\ddots			

図 6 無限に広がった盤のパゴダ関数

この 5 本の等比数列の総和は

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}) / (1 - (\frac{1}{3})) = (\frac{7}{3}) (\frac{3}{2}) = \frac{7}{2}$$

であり、左上隅の 6 マスの合計が $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$ であることから、左上隅 6 マス以外のマス目の値の総和は $\frac{7}{2} - \frac{8}{3} = \frac{5}{6}$ となる。これより、右と下に無限に広がった盤においても、有限回のジャンプ操作で左上隅 6 マスから駒を追い出すのは不可能であることが分る。なぜならば、初期配置 p^s に対し $\text{pag}^*(p^s) = 1$ であり、 $\text{pag}^*(\cdot)$ は単調非減少であるのに、左上隅 6 マスから駒を追い出

¹² なんと、この最適解は端点解ではない！

してしまうと, $\text{pag}^*(\cdot)$ の値が $5/6$ 未満になってしまうからである.¹³

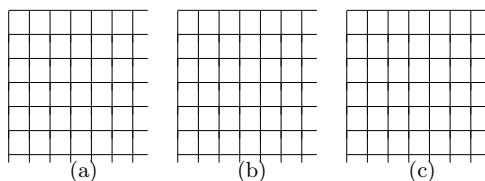


図7 難しそうナパズル

上記の値 1 と $5/6$ が離れていることから, 実はこのパズルをもう少し難しくすることができる.¹⁴ 実は (有限回のジャンプでは) 図 7(a) の左上隅 5 マスから駒を無くすことも不可能であることが分る. 初期配置 (図 4(a)) から 8 手目で図 7(b) に到達できることからすると, なかなか信じ難い. また, 図 7(a) の 5 箇所駒を置いた (新しい) 初期配置からは, 左上隅最奥の 1 マスを空けることさえ不可能であることが分る (マニアック過ぎる...). 初期配置が非対称なのは美しいので, こんな改変はどうだろう『図 7(c) の配置から初めて, 左上隅最奥の駒を動かさない』. このパズルも解くことができない.¹⁵

5 おわりに

ペグソリティアについては, これだけで一冊の本がある [1]. Berlekamp, Conway and Guy の本 [2] は, 数学パズルのバイブルであろう. 第 2 版は 4 分冊となっており, 第 4 巻にペグソリティアの節がある. そこで紹介されている peg solitaire army (Conway's soldiers) と呼ばれるパズルは, パゴダ関数に黄金比が出現する美しい証明で有名である. 日本語が良いと言う方は, 購入し易いものとして, 最近出た黄金分割に関する好著の翻訳 [3] でも証明を読むことができる. 筆者は, 有限の盤の peg solitaire army の問題を線形計画法で解いてみたところ, パゴダ関数としてフィボナッチ数列が出てきた事に驚愕かつ感動を覚えた経験がある. パゴダ関数と双対問題の関係については, 論文 [6] で触れられている. ちなみに, 不可能性の証明のためにはパゴダ関数は力不足であることも多く, 問題 P1 に「全ての変数は整数」という制約を加えた整数計画がかなり強いことが経験的に確認されている [5, 6]. ペグソリティアの最近の結果については, George Bell's Peg Solitaire Page (<http://www.geocities.com/gibell.geo/pegsolitaire/>)

¹³ 値 $5/6$ は 5 本の等比数列の総和なので, 駒が有限個ならば $\text{pag}^*(\cdot)$ の値が $5/6$ になる事は出来ない.

¹⁴ 解けないパズルを更に難しくするって, 意味が分かりません.

¹⁵ もうやめなさい.

が熱心に更新されているので, 参考になる.

2007 年に出た「ボードパズルで OR を教えよう」という論文 [4] においても, ペグソリティアが取り上げられている.

応用編で取り上げたパズルに対し, 川連信 [7] は本稿とは異なるパゴダ関数を用いて不可能性を示している. 興味のある読者は [7] または [8] をご覧いただきたい. 瀬山士郎の本 [8] では, このパズルの不可能性の証明をデーモン形式の話題の前座として使っている. とても面白い本なのに残念ながら絶版なので, 興味のある方は図書館を探すのが良いかもしれない.¹⁶

参考文献

- [1] J. D. Beasley: *The Ins and Outs of Peg Solitaire* (Paperback), Oxford University Press, USA, 1992.
- [2] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy: *Winning Ways for Mathematical Plays* (2nd Edition). AK Peters, 2004.
- [3] A. Beutelspacher and B. Petri, 柳井浩 (翻訳): 『黄金分割 自然と数理と芸術と』, 共立出版, 2005.
- [4] G. W. DePuy and G. D. Taylor: "Using Board Puzzles to Teach Operations Research," *INFORMS Transactions on Education*, Vol. 7, No. 2, 2007. (<http://ite.pubs.informs.org/Vol7No3/Ritchie-DunhamMorriceAndersonDyer/>)
- [5] G. I. Bell, D. Hirschberg and P. Guerrero: "The Minimum Size Required of a Solitaire Army," *INTEGERS Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, Vol. 7, G7, 2007. (<http://www.integers-ejcnt.org/vol7.html>)
- [6] M. Kiyomi and T. Matsui: "Integer Programming Based Algorithms for Peg Solitaire Problems," *Computers and Games 2000, Revised Papers, Lecture Notes in Computer Science*, Springer, vol. 2063, pp. 229-240, 2001.
- [7] 川連信: 『分裂物語』についての研究, 数学教室, No. 527, pp. 88-91, 1995 年 10 月号.
- [8] 瀬山士郎: 『数学者シャーロック・ホームズ』, 日本評論社, 1996.
- [9] 芦ヶ原伸之: 『パズルの宣教師』, 株式ニコロ, 2005.

¹⁶ 図書館の本は大切に扱きましょう.