ラグランジュ緩和と双対問題 2

松井 知己

1　はじめに

本稿では、凸 2 次計画と半正定値計画について、ラグランジュ緩和を用いてその双対問題を導く。この文章を読む前に、ラグランジュ緩和と双対問題 (1996,2 月号) を読まれることをおすすめします。

2　凸 2 次計画

この節では、凸 2 次計画問題のラグランジュ緩和問題を導入することによって、 Dorn の双対問題が自然な形で導かれることを示そう。次のような凸 2 次計画問題について議論しよう。

$$\begin{array}{lll} \mathrm{QP} & \text{minimize} & (1/2)\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \end{array}$$

ただし行列 Q は対称な正定値行列とする。この凸 2 次計画問題の制約全てを、ラグランジュ乗数ベクトル $\boldsymbol{y}$ を用いてラグランジュ緩和すると

$$\text{minimize} \quad (1/2)\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})$$

という制約の無い問題となる。このときラグランジュ乗数が非負でなければならないことは、「ラグランジュ緩和と双対問題」の 1 節で述べた通りである。

さてこの問題は、制約の無い 2 次関数の最小化という非常に特殊な問題である。行列 Q が正定値であることから、この緩和問題の最適解は一次微分が 0 ベクトルとなるところで最適解を持つ。すなわち最適解は、 $\boldsymbol{x}^T Q + \boldsymbol{c}^T + \boldsymbol{y}^T(-A) = \boldsymbol{0}$ を解いて、 $\boldsymbol{x}^T = (\boldsymbol{y}^T A - \boldsymbol{c}^T)Q^{-1}$ となる。

このとき緩和問題の目的関数値は、

$$\begin{aligned} (1/2)\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) &= (1/2)\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{y}^T A - \boldsymbol{c}^T)\boldsymbol{x} \\ &= (1/2)\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} - \boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} \\ &= -(1/2)\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \\ &= -(1/2)(\boldsymbol{y}^T A - \boldsymbol{c}^T)Q^{-1}(\boldsymbol{y}^T A - \boldsymbol{c}^T)^T + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

となる。明らかに、任意の非負ベクトル $\boldsymbol{y}$ において、上記の値は元の凸 2 次計画の最適値以下となっている。ラグランジュ乗数 $\boldsymbol{y}$ として最も良いものを選ぶ問題は、上記の値を最大化する問題として次のように定式化される。

$$\begin{array}{lll} & \text{maximize} & -(1/2)\boldsymbol{w}^T Q^{-1}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{y}^T A - \boldsymbol{c}^T = \boldsymbol{w}, \ \ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

この問題は再び凸 2 次計画となっており、通常 Dorn の双対問題と呼ばれる。

この双対問題が、元の問題と同じ最適値を持つという「双対定理」は、より高次の議論が必要となる。

3　半正定値計画

半正定値計画問題は、次のような問題である。

$$\begin{array}{lll} \text{SDP} & \text{minimize} & A_0 \bullet X \\ & \text{subject to} & A_i \bullet X = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ & & X \succeq 0, \quad X\text{は対称行列} \end{array}$$

ただし A_i はすべて対称行列とする。この問題の線形制約式をラグランジュ乗数ベルトル $\boldsymbol{y}$ を用いてラグランジュ緩和すると、以下の問題が得られる。

$$\begin{array}{lll} \text{SDP} & \text{minimize} & A_0 \bullet X + \sum_{i=1}^{m} y_i(b_i - A_i \bullet X) = (A_0 - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i) \bullet X + \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} \\ & \text{subject to} & X \succeq 0, \quad X\text{は対称行列} \end{array}$$

この問題は、 X が対称な半正定値行列であるという制約のみを持つ特殊な問題であり、その最適解は容易に分かる。行列 $A_0 - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i$ が負の固有値 λ をもつならば、対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とおけば、任意の正の数 α について $X = \alpha \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T$ は許容解であり、 α を増加させれば目的関数値

$$(A_0 - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i) \bullet (\alpha \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T) = \alpha \boldsymbol{v}^T (A_0 - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i)\boldsymbol{v} = \alpha \lambda ||\boldsymbol{v}||^2$$

はいくらでも小さくなる。

線形計画に対して双対問題を導出したときと同じように、目的関数がいくらでも小さくなるのでは、緩和問題として役にたたないので、緩和問題の最適値が有限のできるだけ大きな値を持つ場合を考える必要がある。すると上記の性質より、行列 $A_0 - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i$ の固有値はすべて非負、すなわち $A_0 - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i$ は半正定値でなければならない。このとき最適解としては $X = 0$ が存在し、最適値は $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b}$ である。

以上より、最も良いラグランジュ乗数を求める問題は次のように書き表される。

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} \\ \text{subject to} & S + \sum_{i=1}^{m} y_i A_i = A_0, \\ & S \succeq 0, \quad S\text{は対称行列} \end{array}$$

「この問題が最適解を持つか？」あるいは「最適値が問題 SDP の最適値と一致するか？」といった性質が成り立つためには、いくつか条件が必要であるが、ここでは省略する。