

相補スラック定理から入って見たら

松井 知己

線形計画の授業で、双対定理の証明をするかどうかは、授業の組立てで重要な問題である。双対定理の証明には、Farkasの補題を使うか単体法の収束を用いる事が多いが、どちらも厳密に証明するのは、非常に時間がかかる。いっそ証明は全て諦めてしまうのも手だが、定理の美しさが伝わらないのが口惜しい。そこで「双対定理の証明は諦めて、相補性から入ったらどうだろう」と考えた。本稿では、2変数の線形計画問題に対し、力学モデルを用いた相補スラック定理の解釈を試みる。

本稿では以下のような線形計画について議論する。

$$\begin{aligned} \text{P:} \quad & \min. \quad c^T x \\ & \text{s.t.} \quad a_j^T x \geq b_j \quad (j = 1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

ただし、各制約式を適当に定数倍することにより、ベクトル a_j の長さはすべて1となっていると仮定する。図1は、問題Pを図示したものとする。制約式の不等式の方から分かるように、ベクトル a_j は、 $a_j^T x \leq b_j$ の境界の超平面と直交し、許容領域方向を向いているベクトルである。問題Pの双対問題は、

$$\begin{aligned} \text{D:} \quad & \max. \quad \sum_{j=1}^m b_j y_j \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^m y_j a_j = c, \\ & \quad y_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m), \end{aligned}$$

であり、相補スラック条件は以下ようになる

- (1) $y_j > 0 \rightarrow a_j^T x = b_j$,
- (2) $a_j^T x > b_j \rightarrow y_j = 0$.

ここで図2のような、構造物を考えよう。制約式のところに壁を置き、目的関数方向が最急降下方向になるように、板を傾けた物である。この壁の中で十分小さな玉を転がすと、日常的な経験から玉は問題Pの最小点で留まることが分かるだろう。最小点で静止した玉のつりあいの式

を考えよう。制約 $a^T x \geq b_j$ の壁が玉を押す力を y_j とすると、玉を斜面に沿って下に引っ張る力が $-c$ であることから、つりあいの式は $-c + \sum_{j=1}^m y_j a_j = 0$ となる。これは双対問題の等式制約に他ならない。壁の押す力は抗力であるから（壁は玉を引っ張ることは出来ないから） $y_j \geq 0$ でなければならない。これで双対問題の制約式はすべて出現した。最後に相補条件を解釈しよう。(1) 玉を押している ($y_j > 0$ である) 壁は、玉に接触していなければならない、すなわち玉の位置を x とすれば $a_j^T x = b_j$ である。(2) 玉と接触していない壁 ($a_j^T x > b_j$ を満たしている壁) は玉を押すことは出来ない、すなわち $y_j = 0$ である。

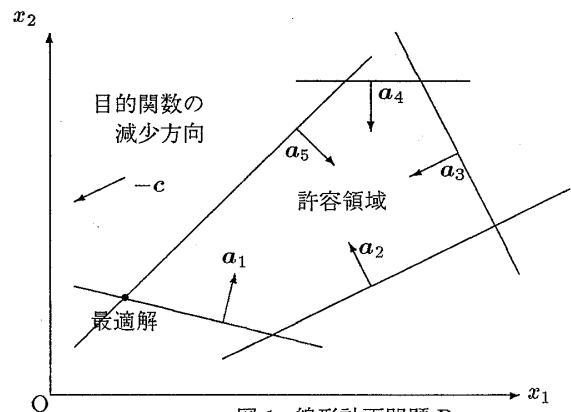


図1: 線形計画問題P.

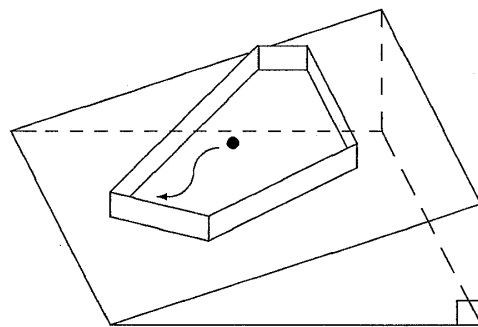


図2: 構造物.

まついともみ 東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻
〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1

URL: <http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~tomomi/>

上記の解釈は、工学部の授業ではそれなりに受け入れられるのだが、経済学部の授業では、残念ながら受けなかった。力学を出した時点で敬遠されてしまうようだ。