嘘付き島へ行こう

松井 知己

私達は日常生活において、 いくつかの事実の組み合わせから (論理的に) ある結論を導き出す という作業を行なっている。例えば、「今日は火曜日である」と「火曜日の前の日は月曜日である」という事実から「昨日は月曜日である」という事実を導くことができる。これは、$F_1, F_2, \ldots, F_m$ が真となる解釈のもとで (たとえばそれが事実であるということから) G は真となるということを確認している作業にほかならない。論理式 $F_1, F_2, \ldots, F_m$ が真となる解釈のもとで G は真となるとき、 G は $F_1, F_2, \ldots, F_m$ の論理的帰結であると言う。

定理 **1.1**: 論理式 G が論理式 $F_1, F_2, \ldots, F_m$ の論理的帰結である 必要十分条件は、論理式 $(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_m) \rightarrow G$ が恒真式となることである。

証明. $(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_m) \rightarrow G$ は恒真式であるとする。すると、 $F_1, F_2, \ldots, F_m$ が真ならば、 G は真である。ゆえに G は $F_1, F_2, \ldots, F_m$ の論理的帰結である。

G は $F_1, F_2, \ldots, F_m$ の論理的帰結であるとする。 $F_1, F_2, \ldots, F_m$ のどれか一つが偽ならば、 $(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_m) \rightarrow G$ は真である。 $F_1, F_2, \ldots, F_m$ がすべて真ならば G は真であり、 $(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_m) \rightarrow G$ は真である。ゆえに $(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_m) \rightarrow G$ は常に真となり恒真式である。 □

上記の定理は、例えば次のような問題でその意味が明確になるだろう。

問題 **1.1**: ある島には、嘘しか言わない嘘付き族と本当のことしか言わない正直族だけが住んでいる。この島の住民である A と B に「貴方達は何族ですか？」と尋ねたところ、 A が「 2 人とも嘘付き族だよ」と答えた。さて 2 人は何族か？

「A が正直族である」という命題を p_A とし、「B が正直族である」という命題を p_B としよう。 A が X と述べたとすると、もし A が正直族ならば X は真であり、もし A が嘘付き族ならば X は偽となる。すなわち $p_A \leftrightarrow X$ が成立する。

上記の問題の状況は $p_A \leftrightarrow (\neg p_A \wedge \neg p_B)$ と表される。この論理式の真理値表を作ると以下のようになる。

p_A	p_B	$p_A \leftrightarrow (\neg p_A \wedge \neg p_B)$
T	T	F
T	F	F
F	T	T
F	F	F

上記の真理値表より、 $(p_A \leftrightarrow (\neg p_A \wedge \neg p_B)) \rightarrow (\neg p_A \wedge p_B)$ は恒真式である。上記の定理から、 $\neg p_A \wedge p_B$ は $p_A \leftrightarrow (\neg p_A \wedge \neg p_B)$ の論理的帰結である。すなわち A は嘘付き族で B は正直族であることが論理的帰結として導かれた。

問題 **1.2**: ある島には、嘘しか言わない嘘付き族と本当のことしか言わない正直族だけが住んでいる。この島の住民である A と B に「貴方達は何族ですか？」と尋ねたところ、 A が「どちらか一人は嘘付き族だよ」と答えた。さて 2 人は何族か？

この問題の状況は $p_A \leftrightarrow (\neg p_A \vee \neg p_B)$ と表される。この論理式の真理値表を作ると以下のようになる。

p_A	p_B	$p_A \leftrightarrow (\neg p_A \vee \neg p_B)$
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	F

上記の真理値表より、 $(p_A \leftrightarrow (\neg p_A \vee \neg p_B)) \rightarrow (p_A \wedge \neg p_B)$ は恒真式である。上記の定理から、 $p_A \wedge \neg p_B$ は $p_A \leftrightarrow (\neg p_A \vee \neg p_B)$ の論理的帰結である。すなわち A は正直族で B は嘘付き族であることが論理的帰結として導かれた。

問題 **1.3**: ある島には、嘘しか言わない嘘付き族と本当のことしか言わない正直族だけが住んでいる。この島の住民である A と B に「貴方達は何族ですか？」と尋ねたところ、 A が「もし私が正直族なら、 B も正直族だよ」と答えた。さて 2 人は何族か？

この問題の状況は $p_A \leftrightarrow (p_A \rightarrow p_B)$ と表される。この論理式の真理値表を作ると以下のようになる。

p_A	p_B	$p_A \leftrightarrow (p_A \rightarrow p_B)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

上記の真理値表より、 $(p_A \leftrightarrow (p_A \rightarrow p_B)) \rightarrow (p_A \wedge p_B)$ は恒真式である。上記の定理から、 $p_A \wedge p_B$ は $p_A \leftrightarrow (p_A \rightarrow p_B)$ の論理的帰結である。すなわち A と B は正直族であることが論理的帰結として導かれた。